

Analisi dei Sistemi

Compito del 24 Gennaio 2005

Esercizio 1 (10 punti). Un integratore a tempo continuo è definito matematicamente dall'espressione

$$y(t) = y(0) + \int_0^t u(\tau) d\tau,$$

dove, per $t \geq 0$, u è l'ingresso all'integratore, y è la sua uscita e $y(0)$ è il valore iniziale dell'uscita.

- (a) (1 punto) Si determini, derivando tale equazione, un modello ingresso-uscita in forma standard.
- (b) (1 punto) Si determini la funzione di trasferimento del sistema.
- (c) (2 punto) Si determini la risposta impulsiva del sistema e si discuta se il valore ottenuto ha una interpretazione fisica.
- (d) (1 punti) Si valuti la stabilità BIBO del sistema.
- (e) (2 punti) Si determini un modello in termini di variabili di stato del sistema dandone anche una rappresentazione circuitale.
- (f) (2 punto) Si valuti la stabilità secondo Lyapunov della realizzazione determinata al punto precedente.
- (g) (1 punto) Si determini la funzione di trasferimento del modello in variabili di stato e si verifichi se essa coincide con quella determinata al punto (b).

Esercizio 2 (12 punti). Si consideri un sistema il cui legame ingresso uscita è descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$0.5 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + \frac{d}{dt} y(t) + 50y(t) = \varrho \frac{d}{dt} u(t) + 20u(t).$$

- (a) (3 punti) Assunto $\varrho = 10$, si calcoli la funzione di trasferimento $W(s)$ e, dopo averla riportata in forma di Bode, se ne determinino tutti i parametri significativi.
- (b) (4 punti) Si tracci il diagramma di Bode della $W(s)$ determinata al punto precedente.
- (c) (3 punti) Si verifichi che tale diagramma ha il significato fisico di risposta a regime, determinando i valori dei seguenti parametri: modulo e pulsazione alla risonanza, e banda passante a 20 decibel.
- (d) (bonus: 2 punti) Si supponga che il parametro ϱ possa variare nell'intervallo $[0, +\infty)$ modificando lo zero della funzione di trasferimento (si noti che il guadagno e i poli non dipendono da ϱ).
Per ridurre la banda passante conviene usare valori di ϱ grandi o piccoli? Qual è il minimo valore realizzabile della banda passante?

Esercizio 3 (10 punti). Si consideri la seguente rappresentazioni in variabili di stato di un sistema lineare e stazionario

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

(a) (2 punti) Si desidera determinare una nuova rappresentazione in cui le nuove variabili di stato

$$z_1(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \text{e} \quad z_2(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

sono rispettivamente la somma e la differenza delle variabili di stato originarie.

Si determini la corrispondente trasformazione di similitudine $\vec{z}(t) = P^{-1}x(t)$ e si calcolino tutte le matrici della nuova rappresentazione.

- (b) (3 punti) Per la rappresentazione originaria è dato il vettore di stato iniziale $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}^T$. Si determini la matrice di transizione dello stato e l'evoluzione libera dello stato a partire da $\vec{x}(0)$.
- (c) (3 punti) Si valuti la controllabilità e la osservabilità della rappresentazione originaria costruendo le corrispondenti matrici di controllabilità e osservabilità.
- (d) (2 punti) Si valuti la controllabilità e la osservabilità della rappresentazione ottenuta per similitudine dandone, se possibile, un'interpretazione fisica. Tale risultato è consistente con quello ottenuto al punto precedente?