Analisi dei Sistemi

Soluzione del compito del 30 Settembre 2004

Esercizio 1. *Dato il sistema descritto dal modello in variabili di stato*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha-2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases},$$

si valuti per quali valori dei parametri α, β il sistema è stabile secondo Lyapunov.

Il sistema è:

- asintoticamente stabile: se $\alpha < 2$;
- stabile ma non asintoticamente: se $\alpha = 2$;
- instabile: se $\alpha > 2$.

Il valore di β non influisce sulla stabilità.

Esercizio 2. *Si consideri la seguente rappresentazioni in variabili di stato di un sistema lineare e stazionario*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

1. *(6 punti) Si determini una trasformazione di similitudine $\vec{z}(t) = P^{-1}x(t)$ che porta ad una rappresentazione in cui la matrice di stato $A' = P^{-1}AP$ è in forma diagonale e si calcolino tutte le matrici della nuova rappresentazione.*

   La trasformazione di similitudine che consente di passare ad una rappresentazione in cui A' è diagonale usa come matrice P la matrice modale, costituita dagli autovettori di A.

   Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ (sono dunque distinti). L'autovettore $\vec{v}$ che corrisponde ad un generico autovalore λ soddisfa l'equazione $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, ossia si determina cercando una soluzione non nulla del sistema (sottodeterminato) di equazioni
   $$(A - \lambda I)\,\vec{v} = \vec{0}.$$

   L'autovalore $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ associato a λ_1 si ricava dunque dal sistema

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   che è soddisfatto da vettori della forma $\begin{bmatrix} x & -x \end{bmatrix}^T$. Scelgo $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

L'autovalore $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ associato a λ_2 si ricava dal sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che è soddisfatto da vettori della forma $\begin{bmatrix} x & -2x \end{bmatrix}^T$. Scelgo $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$.
Vale quindi:

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

mentre la nuova rappresentazione vale

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \\ B' &= P^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \\ C' &= CP = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \\ D' &= D = 0. \end{aligned}$$

Si noti che essendo la matrice A in forma compagna ed essendo i suoi autovalori distinti, la matrice P è una matrice di Vandermonde e poteva determinarsi senza alcun calcolo usando la formula

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

2. *(6 punti) Per la nuova rappresentazione è dato il vettore di stato iniziale $\vec{z}(0) = \begin{bmatrix} 12 & 11 \end{bmatrix}^T$. Si determini l'evoluzione libera dello stato a partire da $\vec{z}(0)$ e l'evoluzione forzata dello stato conseguente alla applicazione dell'ingresso a gradino $u(t) = 2\delta_{-1}(t)$.*

   Per il nuovo sistema
$$\begin{cases} \dot{\vec{z}}(t) &= A'\vec{z}(t) + B'\vec{u}(t) \\ \vec{y}(t) &= C'\vec{z}(t) \end{cases}$$
   scelgo $\vec{z}(0) = \begin{bmatrix} 12 & 11 \end{bmatrix}^T$.
   Essendo la matrice A' diagonale possiamo immediatamente scrivere
$$e^{A't} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$
   e dunque l'evoluzione libera dello stato vale per $t \geq 0$:
$$z_\ell(t) = e^{A't}\vec{z}(0) = \begin{bmatrix} 12e^{-t} \\ 11e^{-2t} \end{bmatrix}.$$
   L'evoluzione forzata dello stato vale per $t \geq 0$
$$\begin{aligned} \vec{z}_f(t) &= \int_0^t e^{A'\tau} B' u(t-\tau) d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 0 & e^{-2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} 2 d\tau \\ &= 2 \int_0^t \begin{bmatrix} 4e^{-\tau} \\ -3e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 8(1-e^{-t}) \\ -3(1-e^{-2t}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 3. *Si consideri un sistema il cui legame ingresso uscita è descritto dalla seguente equazione differenziale:*

$$50\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 202\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 10.02\frac{d}{dt}y(t) + 8.08y(t) = 2\frac{d}{dt}u(t) + 100u(t).$$

1. *(3 punti) Si calcoli la funzione di trasferimento $W(s)$ e, dopo averla riportata in forma di Bode, se ne determino tutti i parametri significativi (si verifichi che uno dei poli vale $p = -4$).*

   La funzione di trasferimento vale:

$$W(s) = \frac{2s + 100}{50s^3 + 202s^2 + 10.02s + 8.08},$$

   e posta in forma di Bode ha espressione

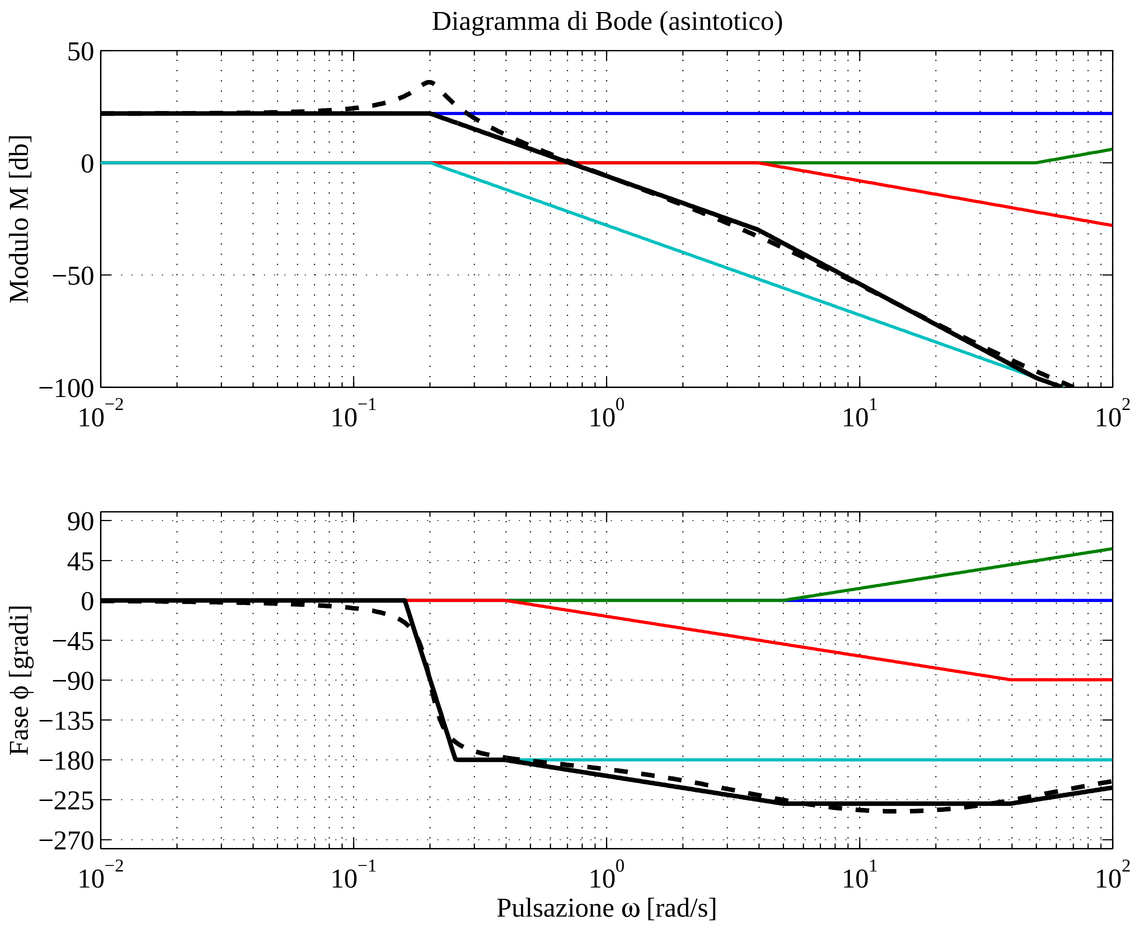
$$W(s) = 12.4\frac{(1 + 0.02s)}{(1 + 0.25s)(1 + 0.99s + 24.7s^2)}.$$

   I parametri significativi sono:

Guadagno	$K = 12.5$,	$K_{db} = 22$;	
Numero poli nell'origine	$\nu = 0$;		
Zero reale	$z = -50$,	$\tau = 0.02$,	$1/\lvert\tau\rvert = 50$;
Polo reale	$p = -4$,	$\tau = 0.25$,	$1/\lvert\tau\rvert = 4$;
Coppia di poli complessi	$p, p' = -0.02 \pm j0.2$,	$\omega_n = 0.201 \approx 0.2$,	$\zeta = 0.1$,
	$\Delta M_{db} = 14$db,	$\omega_s = 0.16$,	$\omega_d = 0.25$;

2. *(5 punti) Si tracci il diagramma di Bode della $W(s)$ determinata al punto precedente.*

   Il diagramma è mostrato in figura (le curve tratteggiate indicano il diagramma risultante esatto).



3. *(3 punti) Si discuta se tale diagramma ha il significato fisico di risposta a regime. Si determini, se esistono, i valori dei seguenti parametri: modulo e pulsazione alla risonanza, e banda passante.*

La funzione di trasferimento ha tutti i poli a parte reale negativa (il sistema è stabile) e dunque essa ha il significato fisico di risposta a regime. Per comodità consideriamo il dettaglio del diagramma di Bode dei moduli nell'intervallo di pulsazione $[10^{-1},\ 10^{0}] = [0.1,\ 0]$ nella seguente figura.

Il modulo e la pulsazione alla risonanza possono valutarsi in corrispondenza al punto di massimo della curva dei moduli. Essi valgono: $M_r = 36$ db e $\omega_r = 0.2$ rad/s.

Il valore del modulo per $\omega = 0$ è pari al guadagno $K_{db} = 22$ db, mentre il valore del modulo si attenua di 3 db raggiungendo il valore 19 db per $\omega_B = 0.31$ rad/s. La banda passante (o banda passante a 3 db) è il valore della frequenza in Hertz che corrisponde a tale pulsazione, ovvero: $B = \omega_B/2\pi = 4.9 \cdot 10^{-2}$ Hz.