Analisi dei Sistemi

Soluzione II Pre-esame, 22 Dicembre 2003

Esercizio 1 (8 punti). *Si definisca la proprietà di*
Caso 1 controllabilità
Caso 2 osservabilità
e si ricordino i principali criteri con cui essa può essere verificata nel caso dei sistemi lineari e stazionari. Si ricordi anche in che modo tale proprietà possa influenzare la struttura della funzione di trasferimento di un sistema SISO lineare e stazionario.

Tale domanda vuole valutare la preparazione generale e verrà valutata anche in base alla chiarezza espositiva e proprietà di linguaggio. Evitare risposte stringate e fare esempi se necessario.

Esercizio 2 (10 punti). *Si consideri un sistema lineare e stazionario la cui funzione di trasferimento vale:*

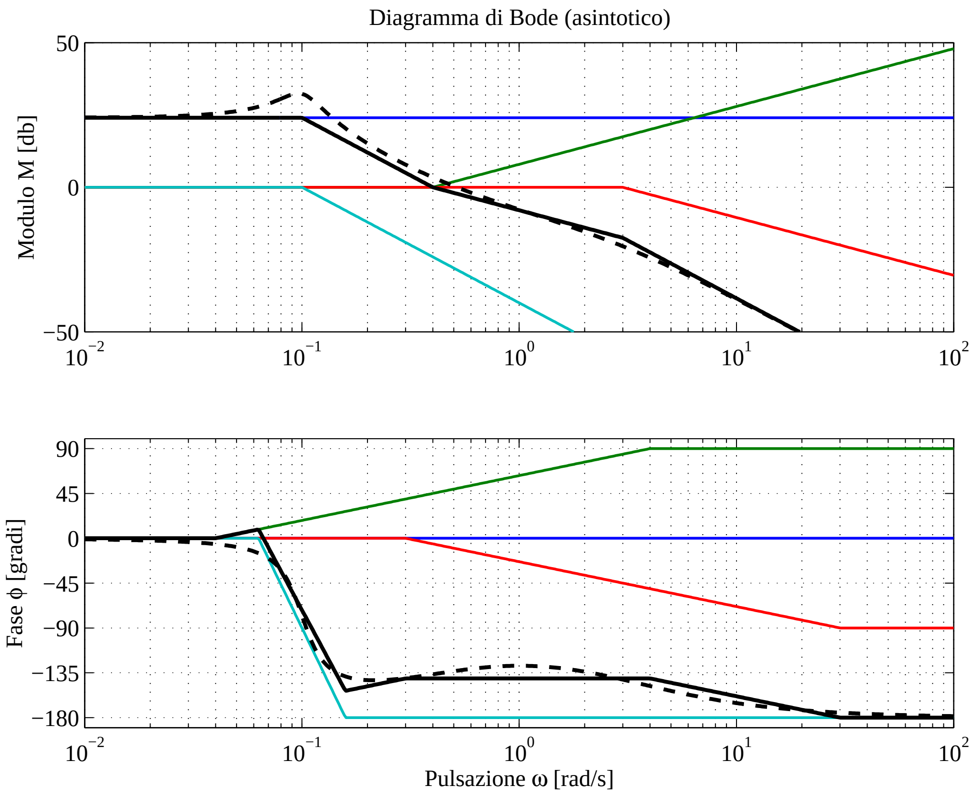
Caso 1 $$W(s) = \frac{120s + 48}{100s^3 + 304s^2 + 13s + 3}.$$

Caso 2 $$W(s) = \frac{1200s + 480}{s^3 + 6s^2 + 108s + 200}.$$

(a) *Dopo aver ricondotto tale funzione alla forma di Bode, indicando tutti i fattori che la compongono e i loro parametri significativi, si tracci il diagramma di Bode della $W(j\omega)$ su carta semilogaritmica.*

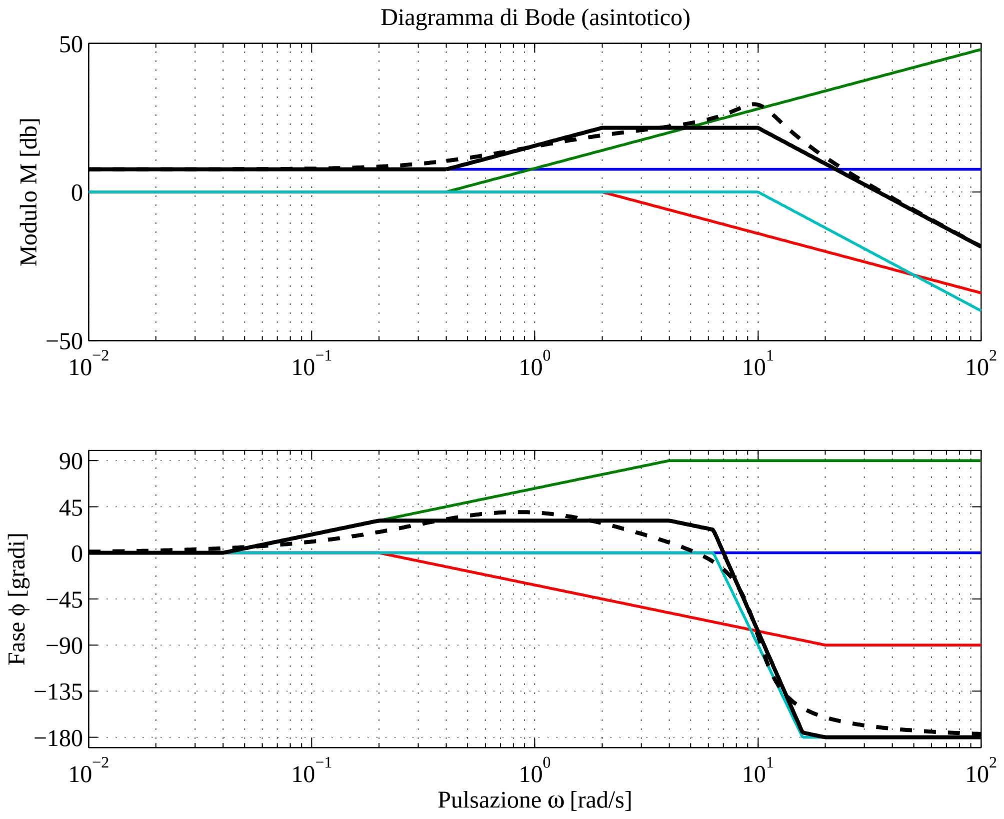
Caso A Vale:

Guadagno	$K = 16$,	$K_{db} = 24$;	
Zero reale	$z = -0.4$,	$\tau = 2.5$,	$1/\vert\tau\vert = 0.4$;
Polo reale	$p = -3$,	$\tau = 0.\bar{3}$,	$1/\vert\tau\vert = 3$;
Coppia di poli complessi	$p, p' = -0.02 \pm j0.098$,	$\omega_n = 0.1$,	$\zeta = 0.2$,
	$\Delta M_{db} = +8$,	$\omega_s = 0.06$,	$\omega_d = 0.16$.



Caso B Vale:

Guadagno	$K = 2.4,$	$K_{db} = 8;$	
Zero reale	$z = -0.4,$	$\tau = 2.5,$	$1/\lvert\tau\rvert = 0.4;$
Polo reale	$p = -2,$	$\tau = 0.5,$	$1/\lvert\tau\rvert = 2;$
Coppia di poli complessi	$p, p' = -2 \pm j9.8,$	$\omega_n = 10,$	$\zeta = 0.2,$
	$\Delta M_{db} = +8,$	$\omega_s = 6,$	$\omega_d = 16.$



(b) *Si ricordi la definizione di* banda passante *a 6 db. Tale parametro è definito per la funzione di trasferimento data? Se si, determinarne il valore dal grafico tracciato al punto 2.* La banda passante a 6 db per un sistema stabile indica la frequenza (in Hz) alla quale il modulo si riduce di 6 db rispetto al valore assunto in $\omega = 0$. Poiché $\lim_{\omega \to 0} M_{db}(\omega) = K_{db}$, sia ω_B la pulsazione per cui $M_{db}(\omega_B) = K_{db} - 6$. Vale dunque $B = \frac{\omega_B}{2\pi}$.

Essendo i due sistemi entrambi stabili, vale

Caso A La banda passante a 6 db vale: $B = \frac{0.18}{2\pi} = 0.028$ Hz.

Caso B La banda passante a 6 db vale: $B = \frac{33}{2\pi} = 5.2$ Hz.

Esercizio 3. *È data la rappresentazione in variabili di stato di un sistema lineare e stazionario*

Caso A

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u(t) \end{cases}$$

Caso B

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u(t) \end{cases}$$

(a) Si determini, mediante l'uso delle trasformate di Laplace, l'evoluzione libera dello stato *e l'evoluzione forzata dell'*uscita *che conseguono per $t \geq 0$ quando il sistema si trova nello stato iniziale*

$$\textbf{Caso A} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad\qquad \textbf{Caso B} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e ad esso viene applicato un segnale di ingresso

$$u(t) = e^{-3t}\delta_{-1}(t),$$

indicando separatamente le due componenti che corrispondono all'evoluzione libera e forzata.

In base alla formula di Lagrange, nel dominio della variabile di Laplace vale

$$X_\ell(s) = (sI - A)^{-1}\, \vec{x}(0); \qquad Y_f(s) = CX_f(s) = \left(C(sI-A)^{-1}B + D\right)\, U(s).$$

In questo caso vale: $U(s) = \frac{1}{s+3}$ e dunque

Caso A

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+4}{s^2+4s+5} & \dfrac{1}{s^2+4s+5} \\ \dfrac{-5}{s^2+4s+5} & \dfrac{s}{s^2+4s+5} \end{bmatrix}.$$

$$X_\ell(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s^2+4s+5} \\ -\dfrac{3s+5}{s^2+4s+5} \end{bmatrix}; \qquad Y_f(s) = \frac{s^2+5s+9}{(s+3)(s^2+4s+5)}.$$

Antitrasformando:

$$x_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t}\cos(t) - e^{-2t}\sin(t) \\ -3e^{-2t}\cos(t) + e^{-2t}\sin(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.41e^{-2t}\cos(t+0.78) \\ 3.16e^{-2t}\cos(t-2.82) \end{bmatrix};$$

$$y_f(t) = 1.5e^{-3t} - 0.5e^{-2t}\cos(t) + 1.5e^{-2t}\sin(t) = 1.5e^{-3t} + 1.58e^{-2t}\cos(t-1.89).$$

Caso B

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{s^2+2s+5} & \dfrac{1}{s^2+2s+5} \\ \dfrac{-5}{s^2+2s+5} & \dfrac{s}{s^2+2s+5} \end{bmatrix}.$$

$$X_\ell(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{2s+3}{s^2+2s+5} \\ -\dfrac{s+10}{s^2+2s+5} \end{bmatrix}; \qquad Y_f(s) = \frac{s^2+4s+5}{(s+3)(s^2+2s+5)}.$$

Antitrasformando:

$$x_\ell(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t}\cos(2t) + 0.5e^{-t}\sin(2t) \\ -e^{-t}\cos(2t) - 4.5e^{-t}\sin(2t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.06e^{-t}\cos(2t-0.25) \\ 4.61e^{-t}\cos(2t+1.79) \end{bmatrix};$$

$$y_f(t) = 0.25e^{-3t} + 0.75e^{-t}\cos(2t) + 0.25e^{-t}\sin(2t) = 0.25e^{-3t} + 0.79e^{-t}\cos(2t-0.32).$$

(b) Si valuti la stabilità secondo Lyapunov del sistema descritto da tale modello, individuando tutti i possibili stati di equilibrio.

Gli autovalori della matrice A valgono

Caso A $\lambda, \lambda' = -2 \pm j.$

Caso B $\lambda, \lambda' = -1 \pm j2.$

Essendo entrambi a parte reale negativa il sistema è asintoticamente stabile. Il solo stato di equilibrio è in tal caso l'origine.

(c) *Si calcoli la funzione di trasferimento $W(s)$ di tale sistema e si discuta se i termini che compongono l'evoluzione forzata dell'uscita determinata al punto (a) hanno la forma che ci si può attendere data la struttura della $W(s)$ e dell'ingresso dato.*

Cosa può dirsi a proposito della controllabilità ed osservabilità del sistema in base alla struttura della $W(s)$?

La funzione di trasferimento vale $W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, ovvero:

Caso A $W(s) = \dfrac{s^2 + 5s + 9}{s^2 + 4s + 5}$, i cui poli valgono $p, p' = -2 \pm j$.

Caso B $W(s) = \dfrac{s^2 + 4s + 5}{s^2 + 2s + 5}$, i cui poli valgono $p, p' = -1 \pm j2$.

La funzione di trasferimento non presenta cancellazioni zero-polo e posta in forma minima ha al denominatore un polinomio di grado 2, pari all'ordine della rappresentazione. Ciò ci permette di dire che il sistema è controllabile e osservabile.

I poli della funzione di trasferimento coincidono con gli autovalori della matrice A. Come ci si attende l'evoluzione forzata contiene tre termini: uno relativo al modo e^{-3t} introdotto dall'ingresso e una coppia di modi pseudoperiodici $e^{\alpha t}\cos(\omega t)$ e $e^{\alpha t}\sin(\omega t)$ (ovvero un singolo modo pseudoperiodico della forma $e^{\alpha t}\cos(\omega t + \phi)$) associati ai due poli complessi e coniugati $\alpha \pm j\omega$ della funzione di trasferimento.

(d) *Si valuti la stabilità BIBO del sistema descritto da tale modello.*

La funzione di trasferimento ha tutti i poli a parte reale negativa e dunque il sistema è BIBO stabile.