Analisi dei Sistemi

Soluzione I Pre-esame 2003

14 Novembre 2003

Esercizio 1. *(8 punti)*

Caso 1 *Si discuta in cosa consiste un* modello in termini di variabili di stato*, indicando le varie forme che esso può assumere a seconda delle proprietà di cui gode un sistema.*

Caso 2 *Si discuta in cosa consiste un* modello ingresso-uscita*, indicando le varie forme che esso può assumere a seconda delle proprietà di cui gode un sistema.*

Caso 3 *Tra i segnali canonici di importanza nell'analisi dei sistemi, possiamo ricordare la famiglia delle rampe esponenziali (o cisoidi) e l'impulso. Si ricordi che forma assumono tali funzioni, le loro proprietà e gli eventuali legami fra esse.*

Nel caso della rampa esponenziale si discuta quali altre funzioni possano considerarsi casi particolari o possano generarsi mediante combinazioni lineari di rampe.

Caso 4 *Si discuta in cosa consiste la* risposta forzata di un sistema *e come essa possa essere calcolata.*

Tale domanda vuole valutare la preparazione generale e verrà valutata anche in base alla chiarezza espositiva e proprietà di linguaggio. Evitare risposte stringate e fare esempi se necessario.

Esercizio 2. *Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello: dove*

Caso 1 $$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\,\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\,\frac{dy(t)}{dt} + 12\,y(t) \;=\; 2\,\frac{du(t)}{dt} + u(t).$$

Caso 2 $$2\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 12\,\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 18\,\frac{dy(t)}{dt} \;=\; 4\frac{du(t)}{dt} + 2u(t).$$

Caso 3 $$3\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 12\,\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 12\,\frac{dy(t)}{dt} \;=\; 6\frac{du(t)}{dt} + 3u(t).$$

Caso 4 $$4\frac{d^3y(t)}{dt^3} - 12\,\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} - 12\,y(t) \;=\; 8\frac{du(t)}{dt} + 4u(t).$$

1. *(4 punti) Determinare i modi di tale sistema e classificarli, dopo averne calcolato i parametri significativi. Tracciare il loro andamento qualitativo.*

   Caso 1 Il polinomio caratteristico vale $P(s) = s^3 + 3s^2 + 4s + 12$ e le sue radici valgono $p_1 = -3$, $p, p' = \pm j2$. Dunque i modi valgono:

   - e^{-3t}: modo aperiodico stabile con costante di tempo $\tau_1 = \frac{1}{3}$.
   - $\cos(2t)$: modo periodico (ovvero pseudoperiodico costante) con pulsazione naturale $\omega_n = 2$ e coefficiente di smorzamento $\zeta = 0$.

   Caso 2 Il polinomio caratteristico vale $P(s) = s^3 + 6s^2 + 9s$ e le sue radici valgono $p_1 = 0$, $p_2 = p_3 = -3$. Dunque i modi valgono:

   - $e^{0t} = 1$: modo costante.
   - e^{-3t} e te^{-3t}: modi aperiodici stabili con costante di tempo $\tau = \frac{1}{3}$.

Caso 3 Il polinomio caratteristico vale $P(s) = s^3 + 4s^2 + 4s$ e le sue radici valgono $p_1 = 0$, $p_2 = p_3 = -2$. Dunque i modi valgono:

- $e^{0t} = 1$: modo costante.
- e^{-2t} e te^{-2t}: modi aperiodici stabili con costante di tempo $\tau = \frac{1}{2}$.

Caso 4 Il polinomio caratteristico vale $P(s) = s^3 - 3s^2 + s - 3$ e le sue radici valgono $p_1 = 3$, $p, p' = \pm j$. Dunque i modi valgono:

- e^{3t}: modo aperiodico instabile con costante di tempo $\tau_1 = -\frac{1}{3}$.
- $\cos(t)$: modo periodico (ovvero pseudoperiodico costante) con pulsazione naturale $\omega_n = 1$ e coefficiente di smorzamento $\zeta = 0$.

2. *(4 punti) Definire il concetto di risposta impulsiva e calcolarne il valore per tale sistema.*

Poiché il sistema è strettamente proprio la risposta impulsiva ha forma

Caso 1 $w(t) = \big(h_1\, e^{-3t} + M\ \cos(2t + \phi)\big)\ \delta_{-1}(t)$ ovvero $w(t) = \big(h_1\, e^{-3t} + B\ \cos(2t) + C\ \cos(2t)\big)\ \delta_{-1}(t)$.

Caso 2 $w(t) = \big(h_1 + h_2\, e^{-3t} + h_3\, t\, e^{-3t}\big)\ \delta_{-1}(t)$.

Caso 3 $w(t) = \big(h_1 + h_2\, e^{-2t} + h_3\, t\, e^{-2t}\big)\ \delta_{-1}(t)$.

Caso 4 $w(t) = \big(h_1\, e^{3t} + M\ \cos(t + \phi)\big)\ \delta_{-1}(t)$ ovvero $w(t) = \big(h_1\, e^{3t} + B\ \cos(t) + C\ \cos(t)\big)\ \delta_{-1}(t)$.

Per calcolare i coefficienti incogniti:

- Si deriva tre volte la $w(t)$ tenendo conto delle discontinuità nell'origine.
- Si sostituisce la $w(t)$ e le sue derivate al primo membro della eq. differenziale, mentre al secondo membro si sostituisce $u(t) = \delta(t)$, $\dot{u}(t) = \delta_1(t)$.
- Imponendo l'eguaglianza fra i coefficienti di $\delta(t)$, $\delta_1(t)$ e $\delta_2(t)$ tra i due membri si ottiene un sistema di tre equazioni in tre incognite che risolto determina i seguenti valori:

  Caso 1 $h_1 = -\frac{5}{13} = -0.38,\ M = 0.57,\ \phi = 0.833$ ovvero $B = \frac{5}{13} = 0.38,\ C = \frac{11}{26} = 0.42.$

  Caso 2 $h_1 = \frac{1}{9} = 0.\bar{1},\ h_2 = -\frac{1}{9} = -0.\bar{1},\ h_3 = \frac{5}{3} = 1.\bar{6}.$

  Caso 3 $h_1 = \frac{1}{4} = 0.25,\ h_2 = -\frac{1}{4} = -0.25,\ h_3 = \frac{3}{2} = 1.5.$

  Caso 4 $h_1 = 0.7,\ M = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707,\ \phi = -3$ ovvero $B = -0.7,\ C = -0.1.$

Esercizio 3. *È data la rappresentazione in variabili di stato di un sistema lineare e stazionario*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

dove

Caso 1 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $b = 1$. **Caso 2** $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, $b = 9$.
Caso 3 $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$, $b = 9$. **Caso 4** $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $b = 4$.

1. *(4 punti) Si determini, mediante lo sviluppo di Sylvester, la matrice di transizione dello stato.*

Vale

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & 0 \\ k\,(e^{a_{11}t} - e^{a_{22}t}) & e^{a_{22}t} \end{bmatrix}$$

con

Caso 1 $k = 2$. **Caso 2** $k = 1$. **Caso 3** $k = -1$. **Caso 4** $k = -2$.

2. *(6 punti) Si determini una trasformazione di similitudine che porti ad una rappresentazione in cui la matrice di stato è in forma diagonale. Determinare le matrici della nuova rappresentazione e verificare (usando la matrice di transizione dello stato della rappresentazione diagonale) il risultato determinato al punto precedente.*

Caso 1 La matrice A ha autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ e ad essi sono associati gli autovettori

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque scegliendo la matrice modale

$$V = [\, \vec{v}_1 \quad \vec{v}_1 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

si ottiene

$$A' = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B' = V^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad C' = CV = [\, 5 \quad 2 \,].$$

Caso 2 La matrice A ha autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -3$ e ad essi sono associati gli autovettori

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque scegliendo la matrice modale

$$V = [\, \vec{v}_1 \quad \vec{v}_1 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

si ottiene

$$A' = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B' = V^{-1}B = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad C' = CV = [\, 3 \quad 2 \,].$$

Caso 3 La matrice A ha autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -3$ e ad essi sono associati gli autovettori

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dunque scegliendo la matrice modale

$$V = [\, \vec{v}_1 \quad \vec{v}_1 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

si ottiene

$$A' = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B' = V^{-1}B = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad C' = CV = [\, 2 \quad -1 \,].$$

Caso 4 La matrice A ha autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ e ad essi sono associati gli autovettori

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Dunque scegliendo la matrice modale

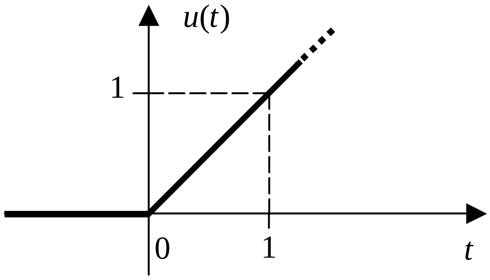
$$V = [\, \vec{v}_1 \quad \vec{v}_1 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad V^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

si ottiene

$$A' = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B' = V^{-1}B = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad C' = CV = [\, 2 \quad -3 \,].$$

In tutti i casi può verificarsi che vale $e^{At} = Ve^{A't}V^{-1}$.

3. *(6 punti) Si determini l'evoluzione forzata dell'uscita che consegue all'applicazione dell'ingresso $u(t)$ in figura*[1]*. Si tracci l'andamento qualitativo di tale funzione.*



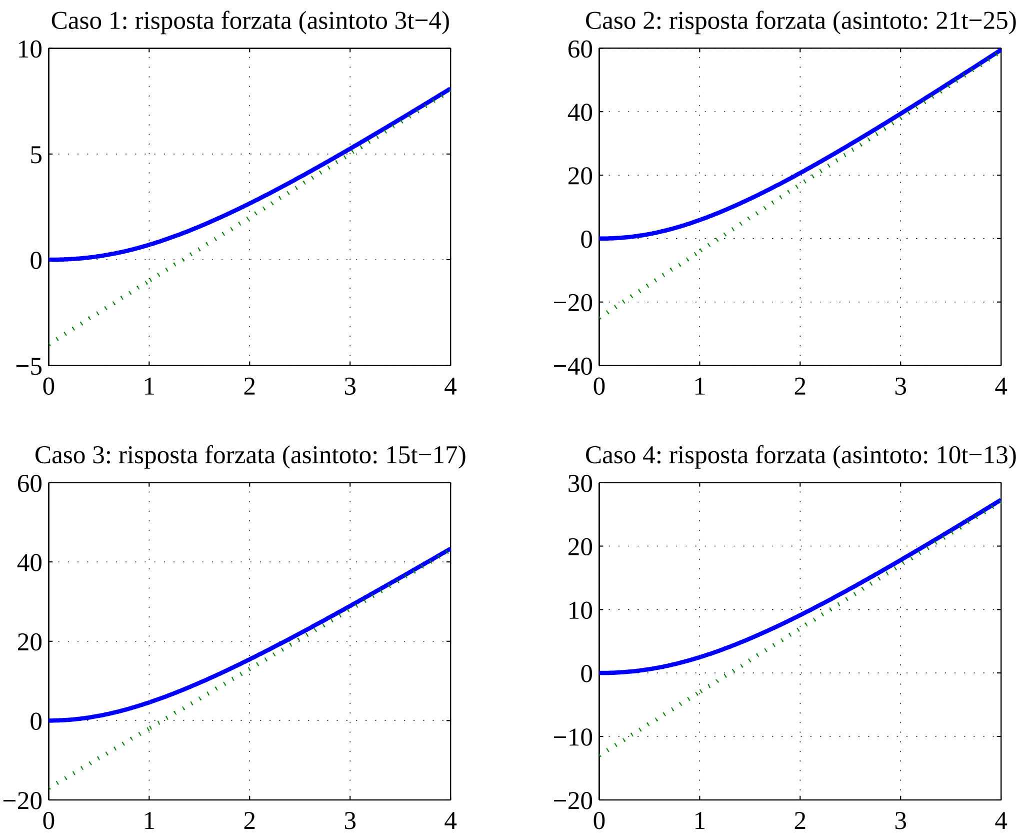
L'evoluzione forzata dell'uscita per $t \geq 0$ in base alla formula di Lagrange vale (si è scelto di usare la rappresentazione diagonale per semplicità)

$$y_f(t) \ = \ C' e^{A't} \int_{t_0}^{t} e^{-A'\tau} B' \, u(\tau) \, d\tau \ = \ C' e^{A't} \int_{0}^{t} e^{-A'\tau} B' \, \tau \, d\tau$$

Vale dunque:

Caso 1 $y_f(t) = \left(-4 + 3t + 5e^{-t} - e^{-2t}\right) \ \delta_{-1}(t)$.
Caso 2 $y_f(t) = \left(-25 + 21t + 27e^{-t} - 2e^{-3t}\right) \ \delta_{-1}(t)$.
Caso 3 $y_f(t) = \left(-17 + 15t + 18e^{-t} - e^{-3t}\right) \ \delta_{-1}(t)$.
Caso 4 $y_f(t) = \left(-13 + 10t + 16e^{-t} - 3e^{-2t}\right) \ \delta_{-1}(t)$.

Ognuna di queste funzioni è la somma di quattro modi: $c_0 + c_1 t + c_2 e^{\lambda_1 t} + c_3 e^{\lambda_2 t}$. Inoltre in tutti e quattro i casi vale $y_f(0) = 0$. Al crescere di t i modi $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ essendo stabili si estinguono e la risposta tende asintoticamente al valore $c_0 + c_1 t$ come indicato nelle figure sotto riportate.



[1]Può essere utile ricordare che vale:

$$\int t e^{at} dt = \frac{1}{a} t e^{at} - \frac{1}{a} \int e^{at} dt = \frac{1}{a} t e^{at} - \frac{1}{a^2} e^{at}.$$