

Analisi dei Sistemi — Esercitazione 2

14 Ottobre 2003

Esercizio 1. Il modello della sospensione ad un grado di libertà mostrato in Figura 1 consiste in una molla con coefficiente elastico K [N/m] e in uno smorzatore con coefficiente di smorzamento b [N s/m]. Si considera come ingresso $u(t)$ la posizione della ruota sul fondo stradale e come uscita $y(t)$ la posizione della massa sospesa.

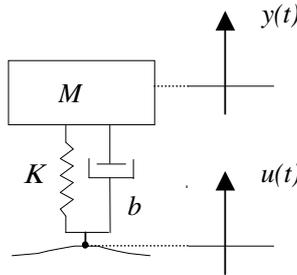


Figura 1: Modello ad un grado di libertà del quarto di automobile.

Il modello ingresso uscita di tale sistema vale:

$$M \frac{d^2}{dt^2} y(t) + b \frac{d}{dt} y(t) + K y(t) = b \frac{d}{dt} u(t) + K u(t).$$

1. Si determini il polinomio caratteristico e le sue radici.
2. Assunto $M = 300$ kg, si supponga di dover progettare una sospensione potendo scegliere fra due smorzatori con $b_A = 900$ N s/m e $b_B = 3000$ N s/m, e fra due molle con $K_A = 12000$ N/m e $K_B = 18000$ N/m. Dunque le possibili sospensioni sono quattro e sono caratterizzate da:

$$(1) : b_A, K_A; \quad (2) : b_A, K_B; \quad (3) : b_B, K_A; \quad (4) : b_B, K_B.$$

Si rappresentino le radici del polinomio caratteristico che corrispondono ai quattro casi sul piano di Gauss e se ne valutino i parametri significativi (costante di tempo, pulsazione naturale, coefficiente di smorzamento). Come sono legati i valori di b e K a tali parametri?

3. Si tracci l'andamento qualitativo dei modi del sistema nei quattro casi: a quale sospensione compete il modo più veloce e a quale il modo più smorzato?
4. Quale di queste sospensioni scegliereste per una macchina di Formula 1 (dove l'obiettivo prioritario è quello di mantenere un assetto di guida costante) e quale scegliereste per una Land Rover (dove l'obiettivo prioritario è quello di garantire un comfort accettabile ai passeggeri anche su terreno accidentato)?
5. Scelta la sospensione (1), si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(t)|_{t=0} = 3, \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = 1.$$

6. Si determini la risposta impulsiva del sistema e se ne discuta la struttura.
7. Si determini, mediante l'integrale di Duhamel, la risposta forzata che consegue all'applicazione del segnale di ingresso¹ qui indicato

$$u(t) = \begin{cases} 0.1 & t \in [1, 3) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

¹ Può essere utile ricordare la seguente formula notevole:

$$\int e^{\alpha t} \cos(\omega t) dt = e^{\alpha t} \frac{\alpha \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)}{\alpha^2 + \omega^2} = e^{\alpha t} \frac{\cos(\omega t - \psi)}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}},$$

essendo $\psi = \arctan(\omega/\alpha)$.