Analisi dei Sistemi

Soluzione senza svolgimento del compito del 30 Settembre 2003

Esercizio 1. *Si consideri il sistema descritto dal modello seguente, dove ϱ è un parametro incognito ma costante.*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 23 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + t^{\varrho}\, u(t). \end{cases}$$

1. *(4 punti) Individuare, in funzione del valore assunto dal parametro $\varrho \in \mathbb{R}$, le proprietà strutturali che caratterizzano tale sistema: lineare o non lineare, stazionario o tempovariante, dinamico o istantaneo, a parametri concentrati o distribuiti, con o senza elementi di ritardi, proprio (strettamente o meno) o improprio. Motivare le risposte.*

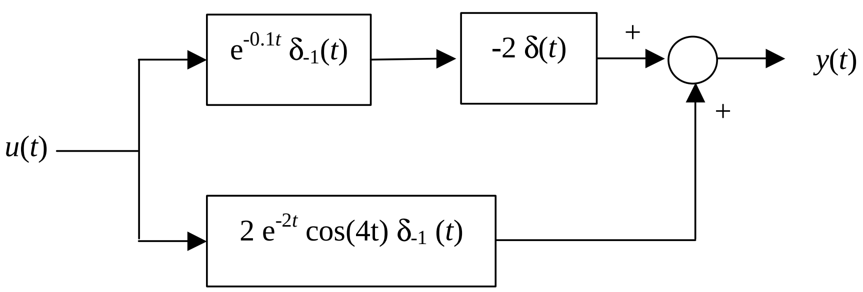
   Lineare, stazionario solo se $\varrho = 0$, dinamico, a parametri concentrati senza elementi di ritardo, proprio ma non strettamente.

2. *(6 punti) Posto $\varrho = 0$, si calcoli la funzione di trasferimento $W(s)$ di tale sistema. Determinare i parametri caratterizzanti dei vari modi (costante di tempo, pulsazione naturale, smorzamento) della $W(s)$ indicando se essi siano stabili o meno e tracciare qualitativamente il loro andamento in funzione del tempo.*

$$W(s) = \frac{(s^3 + 3s^2 + 18s + 24)}{(s-1)^2(s+1)}$$

   Modi instabili e^t, te^t (con $\tau = -1$); modo stabile e^{-t} (con $\tau = 1$).

Esercizio 2. *Si consideri il sistema in figura caratterizzato dalle risposte impulsive dei singoli blocchi.*

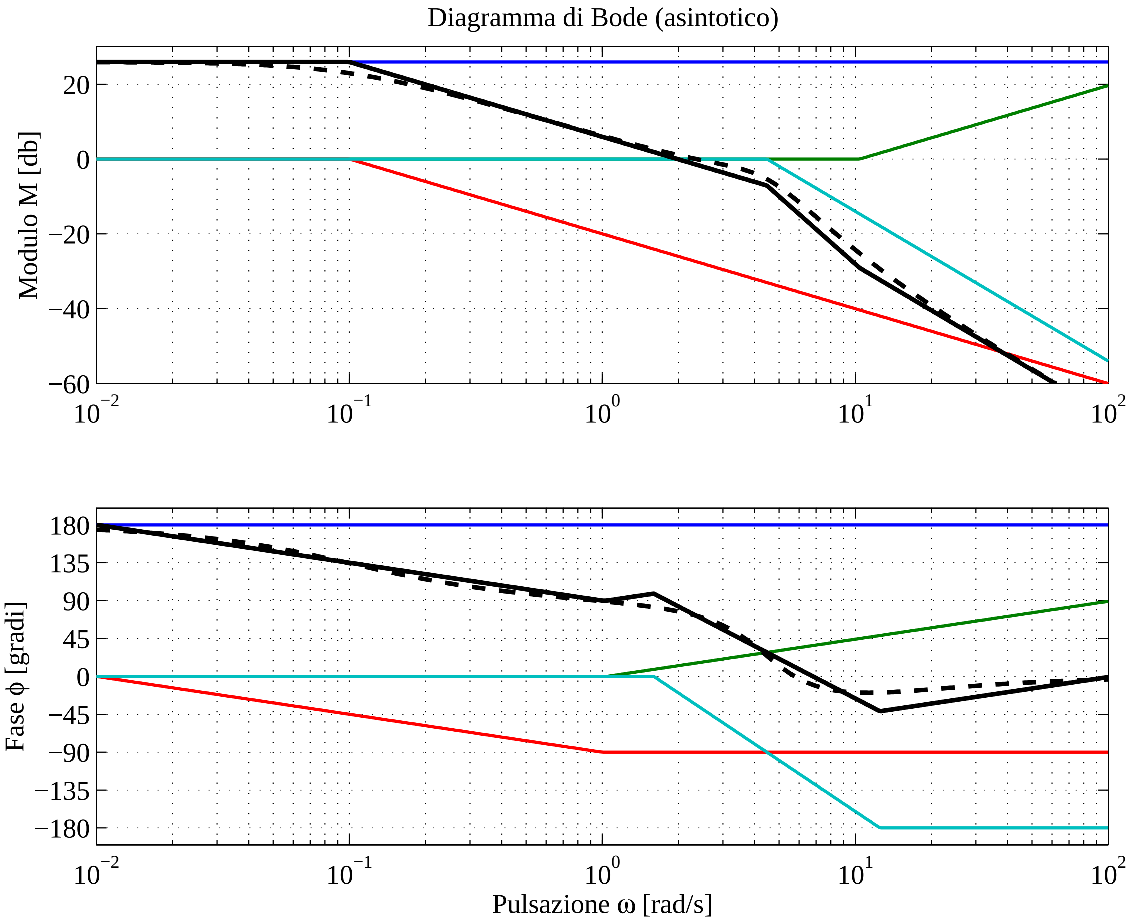


1. *(4 punti) Si calcoli la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$ scrivendola nella forma di Bode.*

$$W(s) = -19.8 \frac{(1 + 0.096s)}{(1 + 10s)(1 + 0.2s + 0.05s^2)}$$

   Il termine trinomio al denominatore ha $\omega_n = 4.472$, $\zeta = 0.447$, $\omega_s = 1.6$, $\omega_n = 12.5$.

2. *(6 punti) Si tracci il diagramma di Bode di tale funzione.*



Esercizio 3. *È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u. \end{cases}$$

1. *(6 punti) Si determini una matrice di similitudine P che porti ad una nuova rappresentazione, in termini del vettore di stato $\vec{z}(t) = P^{-1}x(t)$, in cui la matrice di stato $A' = P^{-1}AP$ è in forma diagonale. Quanto valgono le matrici della nuova rappresentazione?*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad B' = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}; \quad C' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad D' = 1.$$

2. *(6 punti) Si determini, sfruttando la rappresentazione diagonale, l'evoluzione dello stato $\vec{x}(t)$ della rappresentazione originale a partire dalla condizione iniziale $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 12 & 3 \end{bmatrix}^T$ e conseguente all'applicazione dell'ingresso a gradino $u(t) = \delta_{-1}(t-2)$.*

$$\vec{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} (13.5e^{t} - 1.5e^{-t}) \\ 3e^{-t} \end{bmatrix} \delta_{-1}(t); \qquad \vec{x}_f(t) = \begin{bmatrix} (1.5e^{t-2} + 0.5e^{-(t-2)} - 2) \\ (1 - e^{-(t-2)}) \end{bmatrix} \delta_{-1}(t-2).$$