Analisi dei Sistemi

Soluzione senza svolgimento del compito del 15 Settembre 2003

Esercizio 1. *E' dato un sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento:*

$$W(s) = \frac{10s + 1}{s^2 + 5s}$$

1. *(4 punti) Si ricordi la definizione di stabilità BIBO e i vari modi in cui essa può essere caratterizzata (tale domanda vuole valutare la preparazione teorica: evitare risposte troppo stringate).*

   Si discuta la stabilità BIBO del sistema assegnato e, in particolare si valuti, senza calcolarla esplicitamente, se la risposta indiciale si mantenga limitata.

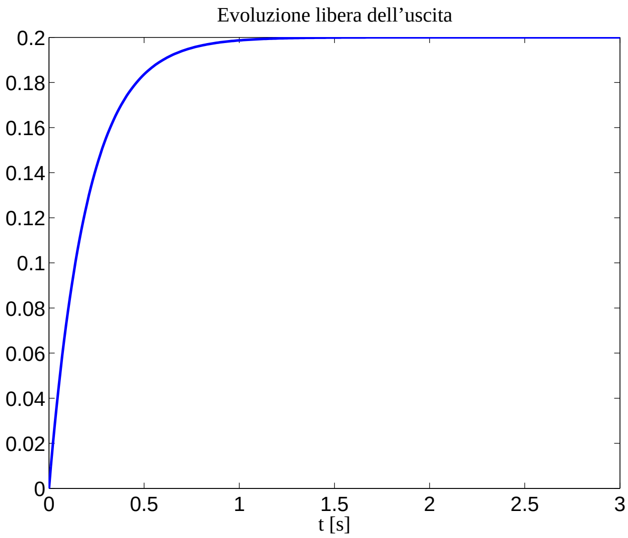
   Il sistema non è BIBO stabile. La risposta indiciale non è limitata perchè contiene un termine $\frac{1}{5}t\delta_{-1}(t)$, ossia una rampa lineare.

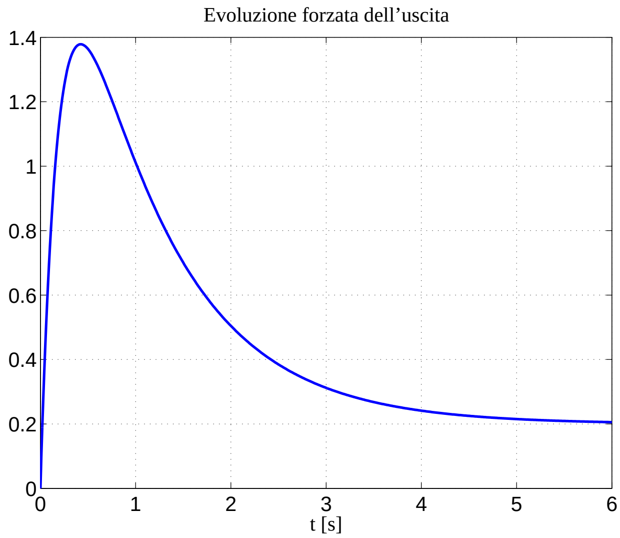
2. *(7 punti) Si determini, mediante l'uso delle trasformate di Laplace, la risposta che consegue all'applicazione di un segnale $u(t) = e^{-2t}\,\delta_{-1}(t)$, a partire da condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 1$, indicando i due termini dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata. Si tracci l'andamento qualitativo dell'evoluzione libera e forzata.*

   L'evoluzione libera e forzata dell'uscita valgono rispettivamente:

$$y_\ell(t) = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-5t}\right)\,\delta_{-1}(t), \qquad y_f(t) = \left(\frac{1}{10} + \frac{19}{6}e^{-2t} - \frac{49}{15}e^{-5t}\right)\,\delta_{-1}(t),$$

   e l'andamento è mostrato in figura.



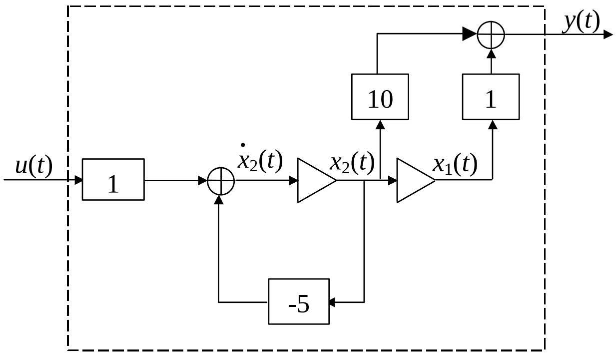


3. *(4 punti) Determinare una rappresentazione di tale sistema in termini di variabili di stato e darne una rappresentazione grafica mediante un diagramma a blocchi. Si precisi se la rappresentazione trovata usa come spazio di stato lo spazio di fase.*

   Una rappresentazione (che non utilizza lo spazio di fase) è

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

e il diagramma a blocchi equivalente è



4. *(7 punti) Determinato lo stato iniziale $\vec{x}(0)$ che corrisponde alle condizioni iniziali date per l'uscita e la sua derivata, si determini la sola evoluzione libera dell'uscita usando la formula di Lagrange e lo sviluppo di Sylvester. Si verifichi che il valore trovato sia consistente con quello determinato al punto 2.*

   Lo stato iniziale vale
$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} \frac{10}{49} \\ \frac{-1}{49} \end{bmatrix}$$
   e la matrice di transizione dello stato vale
$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5}(1 - e^{-5t}) \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}$$
   e si verifica che $y_\ell(t) = Ce^{At}\vec{x}(0)$ ha la stessa espressione precedentemente determinata.

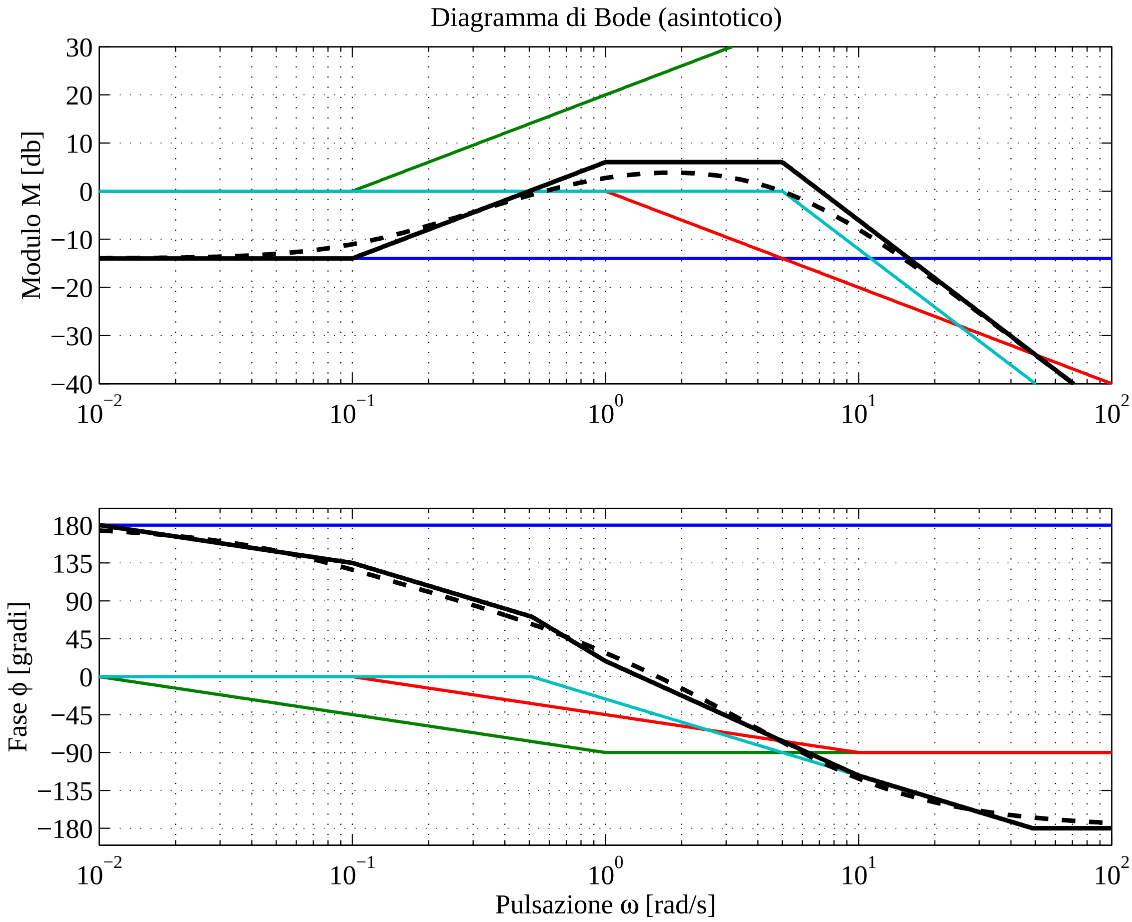
Esercizio 2. *E' dato un sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento (si può verificare che una radice del polinomio al denominatore è $s = -1$):*

$$W(s) = \frac{50s - 5}{s^3 + 11s^2 + 35s + 25}$$

1. *(6 punti) Posta la funzione di trasferimento nella forma di Bode, tracciare il diagramma di Bode della $W(j\omega)$.*

   La funzione di trasferimento in forma di Bode ha espressione
$$W(s) = -\frac{1}{5}\frac{(1 - 10s)}{(1 + s)(1 + 0.2s)^2} = -\frac{1}{5}\frac{(1 - 10s)}{(1 + s)(1 + 0.4s + 0.04s^2)},$$
   a seconda che si consideri al denominatore il fattore $(1 + 0.2s)^2$ (prodotto di due termini monomi identici) o il fattore $(1 + 0.4s + 0.04s^2)$ (termine trinomio con smorzamento $\zeta = 1$).

   Nell'ipotesi di considerare il termine trinomio il diagramma è mostrato in figura (le curve tratteggiate indicano il diagramma risultante esatto)



Qualora si considerasse il fattore $(1+0.2s)^2$, il diagramma del termine trinomio verrebbe scomposto in due diagrammi di termini monomi, che darebbero luogo allo stesso diagramma risultante.

2. *(4 punti) Se valuti se tale sistema ammetta risposta armonica e si calcoli la risposta a regime in corrispondenza ad un segnale di ingresso $u(t) = \sin 2t$. Si discuta come tale risultato possa determinarsi, oltre che per via analitica, anche dall'esame del diagramma di Bode precedentemente tracciato.*

   Il sistema è stabile dunque ammette risposta armonica. La risposta a regime vale ($\angle W(j2)$ è espresso in radianti)

$$y_r(t) = |W(j2)| \sin\left(2t + \angle W(j2)\right) = 1.55 \sin(2t - 0.24).$$

   Tali valori sono consistenti con quelli ricavabili dal diagramma di Bode, perché in corrispondenza di $\omega = 2$ vale:

$$|W(j2)|_{db} = 20 \log_{10} |W(j2)| = 4 \text{ db}; \qquad \angle W(j2)_{gradi} = \frac{180}{\pi} \angle W(j2) = -14 \text{ gradi}.$$