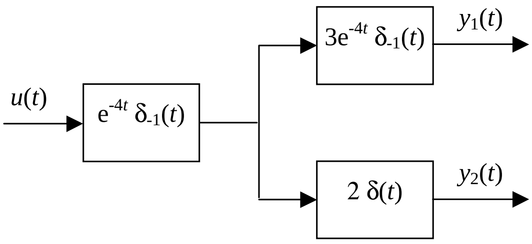
Analisi dei Sistemi

Soluzione del compito del 12 Luglio 2003

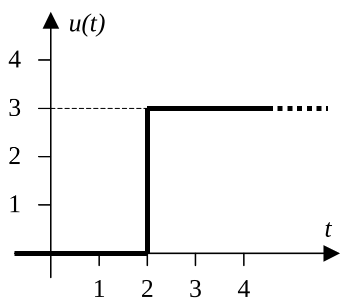
Esercizio 1. *Si consideri il sistema descritto dal diagramma in figura in cui ogni singolo blocco è caratterizzato dalla sua risposta impulsiva.*



1. *(4 punti) Si determini la matrice di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \end{bmatrix}^T$.*

   Posto $w_a(t) = e^{-4t}\ \delta_{-1}(t)$, $\ w_b(t) = 3e^{-4t}\ \delta_{-1}(t)$, $\ w_c(t) = 2\ \delta(t)$, trasformando secondo Laplace si ottiene
   $$W_a(s) = \frac{1}{s+4}, \quad W_b(s) = \frac{3}{s+4}, \quad W_a(s) = 2.$$
   Vale anche
   $$Y_1(s) = W_1(s)U(s) = W_b(s)W_a(s)U(s) = \frac{3}{(s+4)^2}U(s),$$
   e
   $$Y_2(s) = W_2(s)U(s) = W_c(s)W_a(s)U(s) = \frac{2}{(s+4)}U(s)$$
   da cui si ottiene
   $$Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(s) \\ W_2(s) \end{bmatrix} U(s) = W(s)U(s)$$
   con
   $$W(s) = \begin{bmatrix} W_1(s) \\ W_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{(s+4)^2} \\ \frac{2}{(s+4)} \end{bmatrix}.$$

2. *(6 punti) Considerando solo la prima delle due uscite, si determini mediante l'uso delle trasformate di Laplace la risposta forzata $y_{f,1}(t)$ che consegue all'applicazione del segnale d'ingresso $u(t)$ in figura. Si tracci l'andamento qualitativo di tale risposta.*



L'ingresso dato è un gradino unitario di ampiezza 3 e traslato verso destra di 2 secondi. La sua trasformata vale dunque:

$$U(s) = 3\,\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)]\,e^{-2s} = \frac{3}{s}\,e^{-2s}.$$

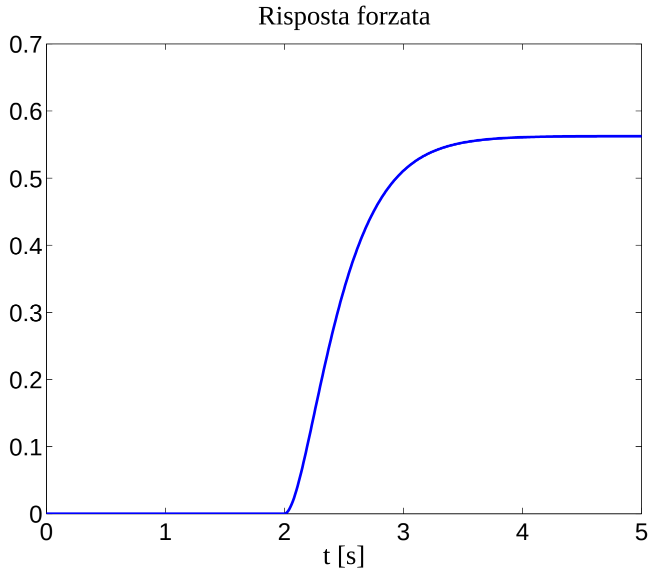
Le risposte forzata da determinarsi vale

$$Y_{f,1} = W_1(s)U(s) = \frac{9}{s(s+4)^2}\,e^{-2s} = \underbrace{\left(\frac{9/16}{s} + \frac{-9/16}{(s+4)} + \frac{-9/4}{(s+4)^2}\right)}_{\text{sviluppo di Heaviside di } \frac{9}{s(s+4)^2}}\,e^{-2s}$$

da cui antitrasformando si ottiene:

$$\begin{aligned} y_{f,1}(t) &= \left(\frac{9}{16} - \frac{9}{16}e^{-4(t-2)} - \frac{9}{4}(t-2)e^{-4(t-2)}\right)\,\delta_{-1}(t-2) \\ &= \left(0.56 + 11737e^{-4t} - 6707te^{-4t}\right)\,\delta_{-1}(t-2). \end{aligned} \tag{1}$$

L'andamento è mostrato in figura.



NB: L'esercizio poteva anche risolversi in modo diverso tenendo presente che il sistema dato è lineare e stazionario.

Si calcola dapprima la riposta indiciale di tale sistema relativamente alla prima uscita, che vale:

$$Y_{\text{ind},1}(s) = W_1(s)\frac{1}{s} = \frac{3}{s(s+4)^2} = \frac{3/16}{s} - \frac{3/16}{(s+4)} - \frac{-3/4}{(s+4)^2}$$

da cui antitrasformando

$$y_{\text{ind},1}(t) = \left(\frac{3}{16} - \frac{3}{16}e^{-4t} - \frac{3}{4}te^{-4}\right)\,\delta_{-1}(t).$$

Poiché l'ingresso dato è un gradino unitario di ampiezza 3 e traslato verso destra di due secondi, la risposta forzata vale:

$$y_{f,1}(t) = 3\,y_{\text{ind},1}(t-2)$$

da cui si ricava ancora l'espressione data in Eq. (1).

Esercizio 2. *Si consideri un sistema il cui legame ingresso uscita è descritto dalla seguente equazione differenziale:*

$$25\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 100\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = \frac{d}{dt}u(t) + 50u(t).$$

1. *(3 punti) Si calcoli la funzione di trasferimento $W(s)$ e, dopo averla riportata in forma di Bode, se ne determino tutti i parametri significativi.*

   La funzione di trasferimento vale:

$$W(s) = \frac{s+50}{25s^3 + 100s^2 + 5s + 4},$$

   e posta in forma di Bode ha espressione

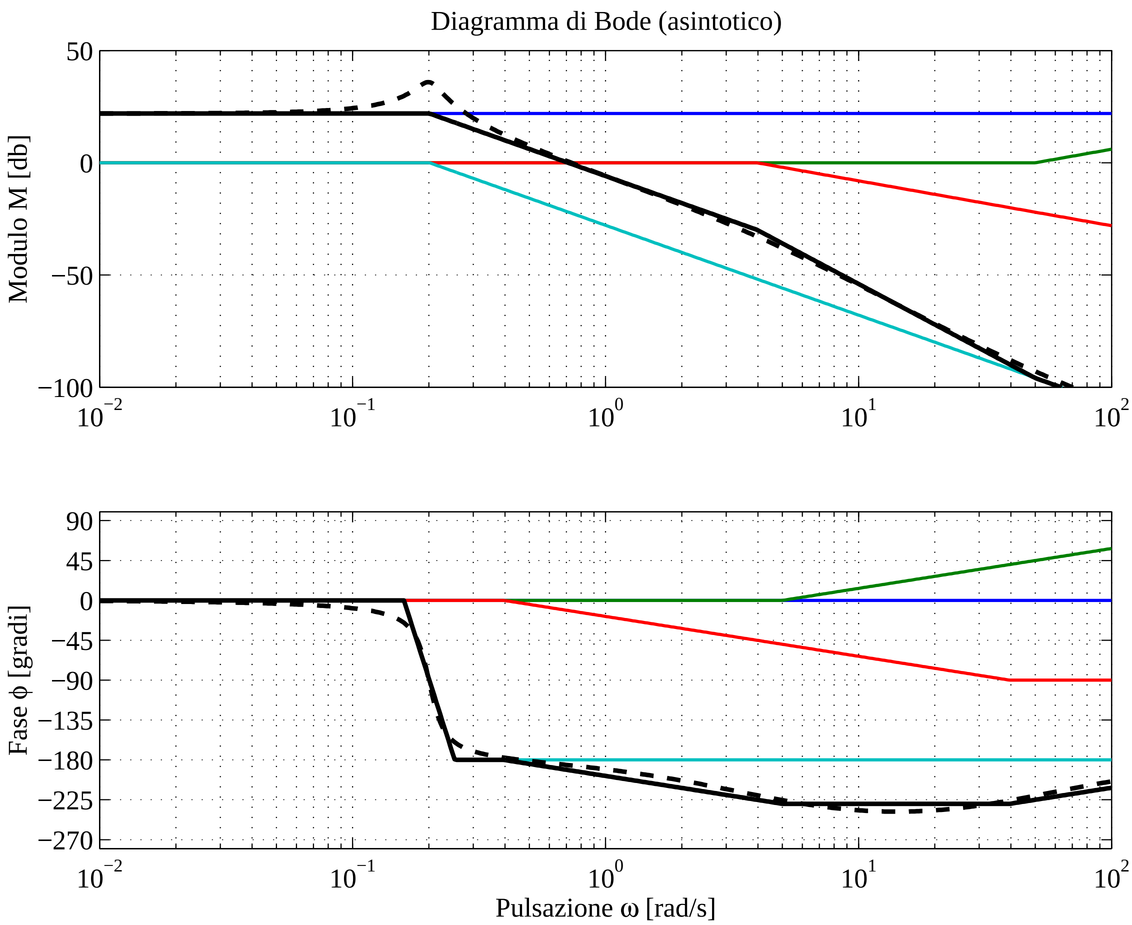
$$W(s) = 12.5\frac{(1+0.02s)}{(1+0.25s)(1+s+25s^2)}.$$

   poiché i parametri significativi sono:

Guadagno	$K = 12.5$,	$K_{db} = 22$;	
Numero poli nell'origine	$\nu = 0$;		
Zero reale	$z = -50$,	$\tau = 0.02$,	$1/\lvert\tau\rvert = 50$;
Polo reale	$p = -3.96 \approx 4$,	$\tau = 0.253 \approx 0.25$,	$1/\lvert\tau\rvert \approx 4$;
Coppia di poli complessi	$p, p' = -0.02 \pm j0.2$,	$\omega_n = 0.201 \approx 0.2$,	$\zeta = 0.1$,
	$\Delta M_{db} = 14$db,	$\omega_s = 0.16$,	$\omega_d = 2.5$;

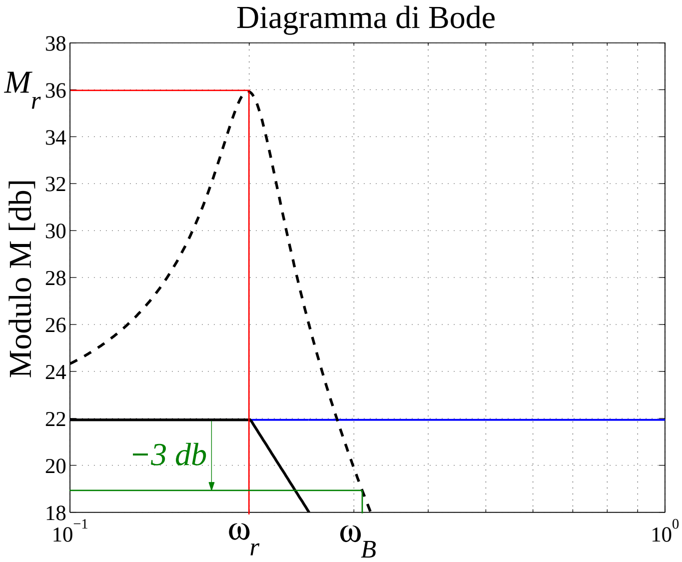
2. *(5 punti) Si tracci il diagramma di Bode della $W(s)$ determinata al punto precedente.*

   Il diagramma è mostrato in figura (le curve tratteggiate indicano il diagramma risultante esatto).



3. *(3 punti) Si discuta se tale diagramma ha il significato fisico di risposta armonica. Si determini, se esistono, i valori dei seguenti parametri: modulo e pulsazione alla risonanza, e banda passante.*

   La funzione di trasferimento ha tutti i poli a parte reale negativa (il sistema è stabile) e dunque essa ha il significato fisico di risposta armonica. Per comodità consideriamo il dettaglio del diagramma di Bode dei moduli nell'intervallo di pulsazione $[10^{-1},\ 10^0] = [0.1,\ 0]$ nella seguente figura.



   Il modulo e la pulsazione alla risonanza possono valutarsi in corrispondenza al punto di massimo della curva dei moduli. Essi valgono: $M_r = 36$ db e $\omega_r = 0.2$ rad/s.

   Il valore del modulo per $\omega = 0$ è pari al guadagno $K_{db} = 22$ db, mentre il valore del modulo si attenua di 3 db raggiungendo il valore 19 db per $\omega_B = 0.31$ rad/s. La banda passante (o banda passante a 3 db) è il valore della frequenza in Hertz che corrisponde a tale pulsazione, ovvero: $B = \omega_B/2\pi = 4.9 \cdot 10^{-2}$ Hz.

Esercizio 3. *È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \end{cases}$$

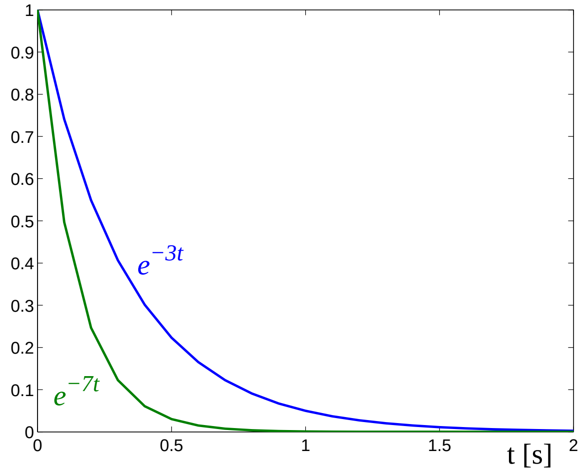
1. *(3 punti) Si classifichino i modi che caratterizzano tale sistema, determinandone i parametri significativi e tracciandone l'andamento qualitativo. Qual è il modo più veloce?*

   I modi di tale sistema sono caratterizzati dagli autovalori della matrice A. Il polinomio caratteristico di A vale $P(\lambda) = \lambda^2 + 10\lambda + 21$ le cui radici sono $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -7$.

   Il sistema è dunque caratterizzato da due modi *aperiodici* e *stabili*:

   - Modo $e^{\lambda_1 t} = e^{-3t}$ che ha costante di tempo $\tau_1 = -\frac{1}{\lambda_1} = 0.\overline{3}$.
   - Modo $e^{\lambda_2 t} = e^{-7t}$ che ha costante di tempo $\tau_2 = -\frac{1}{\lambda_2} = 0.14$.

   L'andamento dei due modi è mostrato nella figura seguente, dove si osserva che il modo e^{-7t} (quello a cui è associata la minore costante di tempo) è il più veloce ad estinguersi.



2. *(3 punti) Si determini se tale sistema è controllabile e osservabile.*

   Per determinare se il sistema è controllabile e osservabile si costruiscono le matrice di controllabilità ed osservabilità. Si osservi che si tratta di un sistema MIMO di ordine $n = 2$ con $r = 1$ ingressi e $p = 2$ uscite.

   - La matrice di controllabilità del sistema è una matrice di ordine $n \times (nr) = 2 \times 2$ e vale

     $$C_c = \left[\begin{array}{c|c} B & AB \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

     Tale matrice quadrata è singolare e ha rango $\rho = 1$ inferiore all'ordine del sistema $n = 2$. Dunque la rappresentazione non è controllabile.

   - La matrice di osservabilità del sistema è una matrice di ordine $(np) \times n = 4 \times 2$ e vale

     $$C_o = \left[\begin{array}{c} C \\ \hline CA \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

     e ha rango $\rho = 2$ pari all'ordine del sistema (basta considerare il minore di ordine 2 costituito dalla sola matrice quadrata C che è non singolare). Dunque la rappresentazione è osservabile.

3. *(4 punti) Si ricordi la definizione di stabilità secondo Lyapunov. Il sistema dato gode di tale proprietà? Che può dirsi a proposito della stabilità BIBO?*

   Il sistema è asintoticamente stabile secondo Lyapunov perché gli autovalori della matrice A sono tutti a parte reale negativa.

   Questo implica anche che il sistema è BIBO stabile. Infatti i modi che caratterizzano le risposte impulsive tra l'ingresso e le due uscite sono un sottoinsieme[1] dei modi associati alla matrice A e dunque saranno anche essi tutti stabili.

   Ciò può facilmente verificarsi (ma tale calcolo non è necessario per rispondere alla domanda) determinando la matrice di trasferimento che vale

   $$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} \frac{s+5}{s+3} \\ \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}.$$

   Si osservi che in entrambe le funzioni di trasferimento che descrivono il legame fra l'ingresso e le due uscite resta solo il polo -3: il modo incontrollabile e^{-7t} è scomparso.

[1] I modi non controllabili o non osservabili non sono presenti nella risposta impulsiva.