Analisi dei Sistemi

Soluzione del compito del 26 Giugno 2003

Esercizio 1. *Per i due sistemi descritti dai modelli seguenti, individuare le proprietà strutturali che li caratterizzano: lineare o non lineare, stazionario o tempovariante, dinamico o istantaneo, a parametri concentrati o distribuiti, con o senza elementi di ritardi, proprio (strettamente o meno) o improprio. Motivare le risposte.*

1. *(4 punti) Legame ingresso-uscita:*

$$\ddot{y}(t) + (t^2 - 1)y(t) = 6u(t - T).$$

Il sistema descritto da tale modello è:

- lineare: l'equazione differenziale è una combinazione lineare dei segnali di uscita, di ingresso e delle loro derivate;
- tempovariante: il coefficiente del termine $y(t)$ vale $t^2 - 1$ e dunque non è costante ma dipende dal tempo;
- dinamico: l'equazione differenziale è di ordine $n = 2 > 0$;
- a parametri concentrati: non vi sono derivate parziali;
- con elementi di ritardo: l'equazione lega l'uscita e la sua derivata al tempo t con l'ingresso al tempo $(t - T)$;
- strettamente proprio: l'ordine massimo di derivazione dell'uscita vale $n = 2$ mentre l'ordine massimo di derivazione dell'ingresso vale $m = 1$ e dunque $n > m$.

2. *(4 punti) Rappresentazione in variabili di stato:*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -2 & x_1(t) \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 3\, u(t). \end{array} \right.$$

Il sistema descritto da tale modello è:

- non lineare: la rappresentazione non è nella forma standard costituita da n equazioni differenziali lineari del primo ordine e da una trasformazione lineare d'uscita perché vale $\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_1(t)x_2(t) + u(t)$;
- stazionario: $\dot{x}_1(t)$ non ha una dipendenza esplicita dal tempo;
- dinamico: il sistema di equazioni è di ordine $n = 2 > 0$;
- a parametri concentrati: non vi sono derivate parziali;

- senza elementi di ritardo: non vi sono argomenti in t e argomenti traslati nel tempo della forma $(t-T)$;
- proprio ma non strettamente perché l'equazione di stato vale

  $$y(t) = C\vec{x}(t) + Du(t)$$

  con D non nulla: dunque l'uscita al tempo t dipende non solo dallo stato $x(t)$ ma anche dall'ingresso $u(t)$.

Esercizio 2. *Si consideri un sistema il cui legame ingresso uscita è descritto dalla seguente equazione differenziale:*

$$40\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 24\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 10\frac{d}{dt}y(t) = \frac{d^2}{dt^2}u(t) + 4\frac{d}{dt}u(t) + 4u(t).$$

1. *(5 punti) Calcolare la funzione di trasferimento $W(s)$ e la riposta impulsiva $w(t)$ per il sistema dato.*

   La funzione di trasferimento vale:

   $$W(s) = \frac{s^2+4s+4}{s(40s^2+24s+10)}.$$

   Il denominatore ha tre poli $p_1 = 0, p_{2,3} = -0.3 \pm j0.4$ e dunque la $W(s)$ ha il seguente sviluppo di Heaviside

   $$W(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_1}{s+0.3-j0.4} + \frac{\overline{R}}{s+0.3+j0.4}$$

   dove

   $$R_1(s) = \lim_{s\to 0} = \frac{s^2+4s+4}{40s^2+24s+10} = \frac{2}{5}$$

   e

   $$R(s) = \lim_{s\to -0.3+j0.4} = \frac{s^2+4s+4}{40s(s+0.3+j0.4)} = -0.1875 + j0.0344 = 0.19e^{j2.96}$$

   e antitrasformando si ottiene la risposta impulsiva (le due forme sono equivalenti)

   $$\begin{aligned} w(t) &= \left(\tfrac{2}{5} + 0.38e^{-0.3t}\ \cos(0.4t+2.96)\right)\ \delta_{-1}(t) \\ &= \left(\tfrac{2}{5} - \tfrac{3}{8}e^{-0.3t}\ \cos 0.4t - \tfrac{11}{160}e^{-0.3t}\ \sin 0.4t\right)\ \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

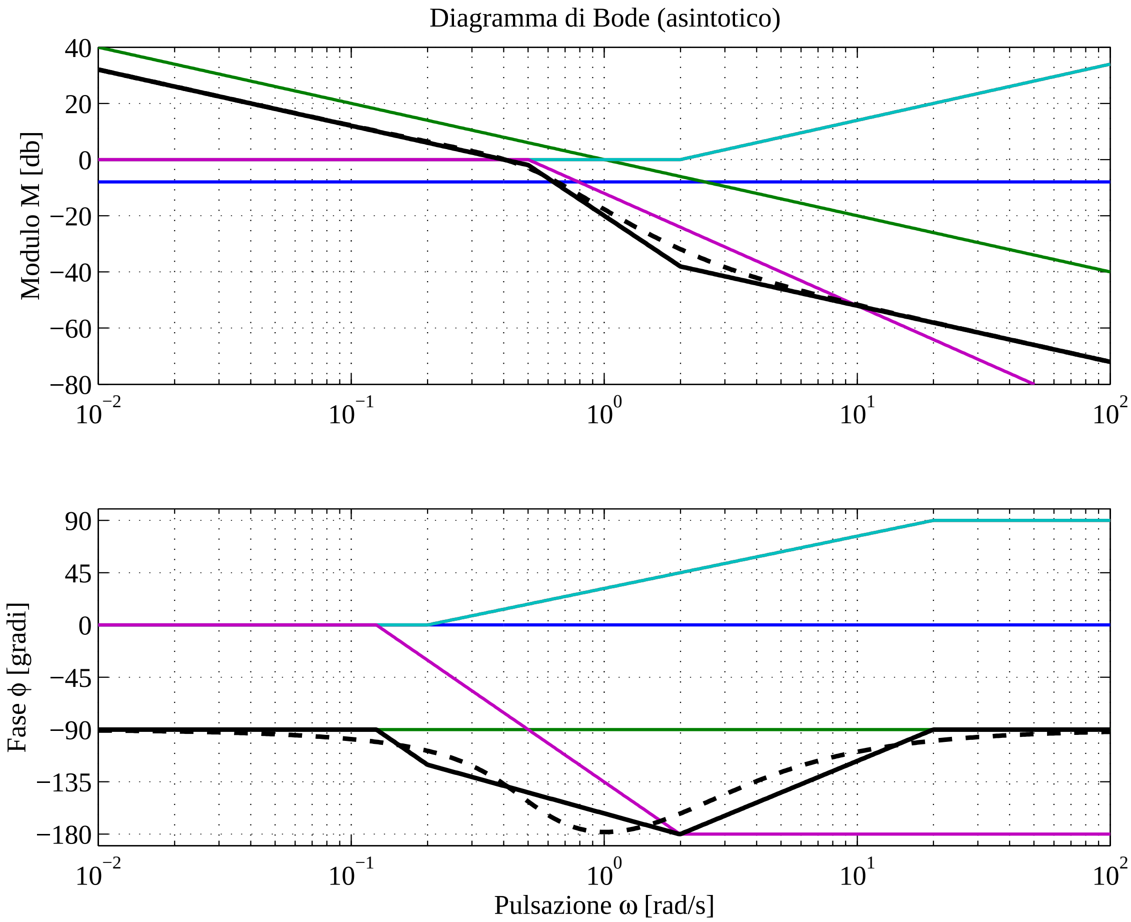
2. *(6 punti) Si tracci il diagramma di Bode della $W(s)$ determinata al punto precedente.* La funzione di trasferimento in forma di Bode vale

   $$W(s) = \frac{2}{5}\frac{(1+0.5s)\ (1+0.5s)}{(1+2.4s+4s^2)}.$$

   Dunque i parametri significativi sono:

Guadagno	$K = \frac{2}{5} = 0.4$,	$K_{db} = -8$;	
Numero poli nell'origine	$\nu = 1$;		
Zero reale	$p = -2$,	$\tau = 0.5$,	$1/\lvert\tau\rvert = 2$;
Zero reale	$p = -2$,	$\tau = 0.5$,	$1/\lvert\tau\rvert = 2$;
Coppia di poli complessi	$z, z' = -0.3 \pm j0.4$,	$\omega_n = 0.5$,	$\zeta = 0.6$,
	$\Delta M_{db} = -2$db,	$\omega_s = 0.13$,	$\omega_d = 2$;

e il diagramma è mostrato in figura (le curve tratteggiate indicano il diagramma risultante esatto).



Esercizio 3. *È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

1. *(4 punti) Si determini mediante la formula di Lagrange l'evoluzione libera dello stato $x_\ell(t)$ e dell'uscita $y_\ell(t)$ a partire da condizioni iniziali dello stato $x(0) = [\,2 \;\; 1\,]^T$.*

   La matrice A ha polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 5$ le cui radici sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -5$. Per determinare la matrice e^{At} mediante lo sviluppo di Sylvester scriviamo il sistema

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} &= \alpha_0(t) + \lambda_1 \alpha_1(t) \\ e^{\lambda_2 t} &= \alpha_0(t) + \lambda_2 \alpha_1(t) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} e^{-t} &= \alpha_0(t) - \alpha_1(t) \\ e^{-5t} &= \alpha_0(t) - 5\alpha_1(t) \end{cases}$$

   da cui si ricava

$$\begin{cases} \alpha_0(t) &= 1.25e^{-t} - 0.25e^{-5t} \\ \alpha_1(t) &= 0.25e^{-t} - 0.25e^{-5t} \end{cases}$$

Dunque

$$e^{At} = \alpha_0(t) I_2 + \alpha_0(t) A = \begin{bmatrix} (1.25e^{-t} - 0.25e^{-5t}) & (0.25e^{-t} - 0.25e^{-5t}) \\ (-1.25e^{-t} + 1.25e^{-5t}) & (-0.25e^{-t} + 1.25e^{-5t}) \end{bmatrix}$$

Possiamo dunque calcolare immediatamente l'evoluzione libera dello stato che per $t \geq 0$ vale:

$$\begin{aligned} \vec{x}_\ell(t) &= e^{At}\,\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} (1.25e^{-t} - 0.25e^{-5t}) & (0.25e^{-t} - 0.25e^{-5t}) \\ (-1.25e^{-t} + 1.25e^{-5t}) & (-0.25e^{-t} + 1.25e^{-5t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2.75e^{-t} - 0.75e^{-5t}) \\ (-2.75e^{-t} + 3.75e^{-5t}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mentre l'evoluzione libera dell'uscita per $t \geq 0$ vale:

$$y_\ell(t) = C\vec{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2.75e^{-t} - 0.75e^{-5t}) \\ (-2.75e^{-t} + 3.75e^{-5t}) \end{bmatrix} = (2.75e^{-t} + 2.25e^{-5t})$$

2. *(4 punti) Si determini una trasformazione di similitudine $\vec{z}(t) = P^{-1}x(t)$ che porti ad una rappresentazione in cui la matrice di stato è in forma diagonale e si calcolino tutte le matrici della nuova rappresentazione.*

   In generale la trasformazione di similitudine che consente di passare ad una rappresentazione in cui A' è diagonale usa come matrice P la matrice modale, costituita dagli autovettori di A. Inoltre, essendo la matrice A in forma compagna la matrice modale è data dalla matrice di Vandermonde, ovvero:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.25 \\ -0.25 & -0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

   mentre la nuova rappresentazione vale

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \\ B' &= P^{-1}B = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \\ C' &= CP = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \\ D' &= D = 0. \end{aligned}$$

3. *(3 punti) Determinata la condizione iniziale $z(0)$ corripondente alla $x(0)$ data al punto 1, si calcoli l'evoluzione libera dello stato per la nuova rappresentazione. Che relazione c'è tra l'evoluzione libera $x_\ell(t)$ e $z_\ell(t)$?*

   Per il nuovo sistema

$$\begin{cases} \dot{\vec{z}}(t) &= A'\vec{z}(t) + B'u(t) \\ y(t) &= C'\vec{z}(t) \end{cases}$$

   vale $\vec{z}(0) = P^{-1}\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} \frac{11}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}^T$.

Essendo la matrice A' diagonale possiamo immediatamente scrivere

$$e^{A't} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}$$

e dunque l'evoluzione libera dello stato vale per $t \geq 0$:

$$z_\ell(t) = e^{A't}\vec{z}(0) = \begin{bmatrix} \frac{11}{4}e^{-t} \\ -\frac{3}{4}e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

4. *(2 punti) Che relazione ci si aspetta tra l'evoluzione libera $y_\ell(t)$ dell'uscita calcolata al punto 1 e l'evoluzione libera dell'uscita calcolata a partire dal segnale $z_\ell(t)$?*

   I due valori devono ovviamente concidere perché una trasformazione di similitudine corrsiponde ad una diversa scelta delle variabili di stato ma non modifica il comportamento esterno del sistema (se i due valori iniziali dello stato sono legati anch'essi mediante la stessa trasformazione).

   Ciò può anche vedersi analiticamente. Detto $y'_\ell(t) = C'\vec{z}_\ell$ vale:

$$y'_\ell(t) = C'\ \vec{z}_\ell(t) = CP\ e^{A't}\vec{z}(0) = CP\ e^{A't}\ P^{-1}\vec{x}(0) = Ce^{At}\vec{x}(0) = y_\ell(t).$$