Analisi dei Sistemi

Soluzione del compito del 28 Febbraio 2003

Testo A

Esercizio 1. *E' dato un sistema descritto dal modello ingresso-uscita*

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 12\,\frac{d}{dt}y(t) + 32\,y(t) = 100\,\frac{d^2}{dt^2}u(t) + 4\,\frac{d}{dt}u(t) + 4\,u(t).$$

1. *(4 punti) Si dia la definizione di risposta impulsiva per un sistema lineare e stazionario ricordando le principali proprietà di tale regime. (Evitare risposte stringate: la domanda vuole valutare la preparazione teorica.)*

   La risposta impulsiva $w(t)$ è la risposta forzata che consegue all'applicazione di un segnale $\delta(t)$ (impulso unitario). La funzione di trasferimento $W(s)$ è la trasformata di Laplace della risposta impulsiva.

   La risposta impulsiva è un regime canonico, ovvero una particolare evoluzione che descrive perfettamente il sistema.

   La $w(t)$ è sempre nulla per $t < 0$, e per $t \geq 0$ è sempre esprimibile come una combinazione lineare dei modi del sistema più (qualora il sistema non fosse strettamente proprio) un termine impulsivo $h_0\,\delta(t)$ (con $h_0 = \frac{b_n}{a_n}$).

2. *(4 punti) Calcolare la funzione di trasferimento $W(s)$ e la riposta impulsiva $w(t)$ per il sistema dato.*

   La funzione di trasferimento vale

   $$W(s) = \frac{100s^2 + 4s + 4}{s^2 + 12s + 32},$$

   e tale funzione ha sviluppo di Heaviside

   $$W(s) = 100 + \frac{397}{s+4} - \frac{1593}{s+8}.$$

   Antitrasformando si ottiene la risposta impulsiva

   $$w(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)] = \left(100\,\delta(t) + 397\,e^{-4t} - 1593\,e^{-8t}\right)\,\delta_{-1}(t),$$

   che contiene un termine impulsivo, come ci si attendeva essendo il sistema proprio ma non strettamente ($n = m$, ossia l'ordine massimo di derivazione dell'uscita e dell'ingresso coincidono).

3. *(6 punti) Si tracci il diagramma di Bode della $W(s)$ determinata al punto precedente.*

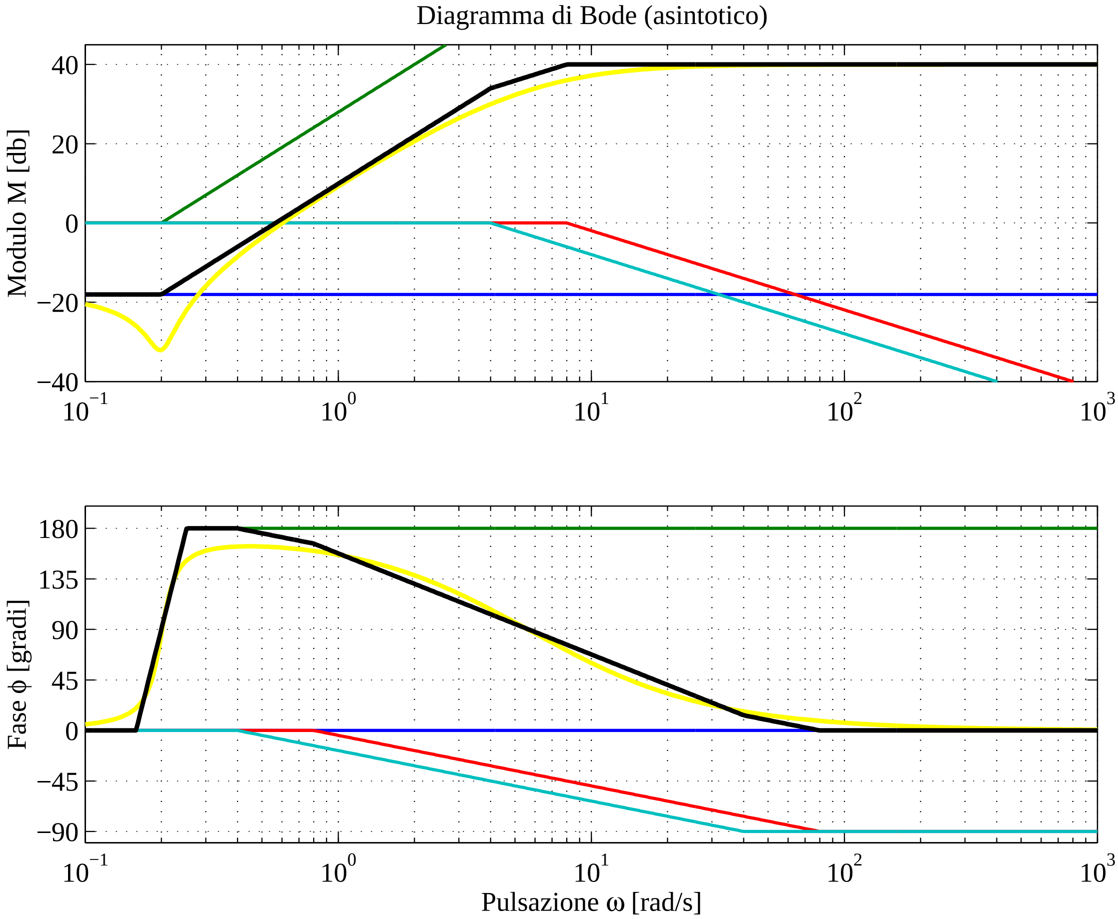
La funzione di trasferimento in forma di Bode vale

$$W(s) = \frac{1}{8}\frac{(1+s+25s^2)}{(1+\frac{1}{4}s)(1+\frac{1}{8}s)}.$$

Dunque i parametri significativi sono:

Guadagno	$K=\frac{1}{8}=0.125,$	$K_{db}=-18;$	
Numero poli nell'origine	$\nu=0;$		
Coppia di zeri complessi	$z,z'=-0.02\pm j0.199,$	$\omega_n=0.2,$	$\zeta=0.1,$
	$\Delta M_{db}=-14$db,	$\omega_s=0.16,$	$\omega_d=0.25,$
Polo reale	$p=-4,$	$\tau=\frac{1}{4}=0.25,$	$1/\|\tau\|=4;$
Polo reale	$p=-8,$	$\tau=\frac{1}{8}=0.125,$	$1/\|\tau\|=8.$

e il diagramma è mostrato in figura.



4. *(6 punti) Si determini la risposta a regime (se esiste) che consegue all'applicazione di un segnale di ingresso $u(t)=3\sin(2t+\frac{\pi}{4})$.*

Si discuta se il valore trovato è consistente con il diagramma di Bode determinato al punto precedente.

La funzione di trasferimento ha poli -2 e -4 entrambi a parte reale negativa. Dunque il sistema è stabile e ammette risposta armonica.

Poiché il segnale di ingresso dato ha pulsazione $\omega = 2$, calcoliamo

$$|W(j2)| = 10.7 \qquad \angle W(j2) = 2.41 \text{ rad}$$

e dunque l'uscita a regime varrà:

$$y(t) = |W(j2)| 3 \sin\left(2t + \frac{\pi}{4} + \angle W(j2)\right) = 32.2 \sin(2t + 3.2)$$

Tali valori per il modulo e la fase della $W(j2)$ sono consistenti con quelli mostrati sul diagramma. Il modulo letto sul diagramma per $\omega = 2$ vale infatti circa $M_{\text{db}} \backsimeq 22$ db, ovvero $M \backsimeq 10^{M_{\text{db}}/20} = 11$. La fase letta sul diagramma per $\omega = 2$ vale $\phi \backsimeq 135°$, ovvero $\phi \backsimeq 2.4$ rad.

Esercizio 2. *E' data la seguente rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario, a parametri concentrati.*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -32 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 3u(t) \end{cases}$$

1. *(4 punti) Si calcoli, mediante lo sviluppo di Sylvester, la matrice di transizione dello stato per tale modello.*

   La matrice A ha due autovalori distinti $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = -8$.

   Per determinare e^{At} scriviamo il sistema

   $$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \alpha_0(t) + \lambda_1 \alpha_1(t) \\ e^{\lambda_2 t} = \alpha_0(t) + \lambda_2 \alpha_1(t) \end{cases} \implies \begin{cases} e^{-4t} = \alpha_0(t) - 4\alpha_1(t) \\ e^{-8t} = \alpha_0(t) - 8\alpha_1(t) \end{cases}$$

   da cui si ricava

   $$\begin{cases} \alpha_0(t) = 2e^{-4t} - e^{-8t} \\ \alpha_1(t) = 0.25e^{-4t} - 0.25e^{-8t} \end{cases}$$

   Dunque

   $$e^{At} = \alpha_0(t) I_2 + \alpha_1(t) A = \begin{bmatrix} (2e^{-4t} - e^{-8t}) & (0.25e^{-4t} - 0.25e^{-8t}) \\ (-8e^{-4t} + 8e^{-8t}) & (-e^{-4t} + 2e^{-8t}) \end{bmatrix}$$

2. *(5 punti) Si valuti, usando la formula di Lagrange, l'evoluzione libera dello* stato *e della* uscita *a partire da condizioni iniziali $y(t_0) = 6, \dot{y}(t_0) = 0$, dove $t_0 = 3$.*

   NOTA BENE: Se non si è in grado di determinare lo stato iniziale che corrisponde a tali condizioni iniziali si può rispondere alla domanda in forma semplificata (valore 4 punti) calcolando l'evoluzione libera a partire dallo stato iniziale $\vec{x}(t_0) = [-5 \;\; 16]^T$.

Per calcolare lo stato $\vec{x}(t_0) = [x_1(t_0)\ x_2(t_0)]^T$ che corrisponde alle condizioni date per l'uscita e la sua derivata, dobbiamo usare la trasformazione di uscita. Posto $u(t) = 0$ (stiamo calcolando l'evoluzione libera) vale

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) \\ y(t) &= C\vec{x}(t) \end{cases}$$

e dunque considerando la trasformazioni di uscita e la derivata di tale relazione si ricava anche

$$\begin{cases} y(t) &= C\vec{x}(t) \\ \dot{y}(t) &= C\dot{\vec{x}}(t) = CA\vec{x}(t) \end{cases}$$

dunque in $t = t_0$ vale:

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -32 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ricava

$$\vec{x}(t_0) = \begin{bmatrix} -5 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Infine l'evoluzione libera dello stato vale per $t \geq t_0 = 3$

$$x_\ell(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{x}(t_0) = \begin{bmatrix} -6e^{-4(t-3)} + e^{-8(t-3)} \\ 24e^{-4(t-3)} - 8e^{-8(t-3)} \end{bmatrix},$$

mentre l'evoluzione libera dell'uscita vale per $t \geq t_0 = 3$

$$y_\ell(t) = C\vec{x}_\ell(t) = Ce^{A(t-t_0)}\vec{x}(t_0) = 12e^{-4(t-3)} - 6e^{-8(t-3)}.$$

3. *(4 punti) Si determini una trasformazione di similitudine che porti ad una nuova rappresentazione in cui la matrice di stato è in forma diagonale, indicando tutte le matrici della nuova rappresentazione.*

   La matrice A è in forma compagna e ha autovalori $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = -8$. Possiamo dunque usare come matrice di similitudine la matrice di Vandermonde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}, \qquad V^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0.25 \\ -1 & -0.25 \end{bmatrix},$$

   e dunque la nuova rappresentazione è definita dalle matrici

$$A' = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix},$$

$$B' = V^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.25 \end{bmatrix},$$

$$C' = CV = \begin{bmatrix} -2 & -6 \end{bmatrix},$$

$$D' = D = 3.$$