Analisi dei Sistemi

Soluzione del compito dell'11 Febbraio 2003

Esercizio 1. *E' dato un sistema descritto dal modello ingresso-uscita*

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}u(t) + 6u(t).$$

1. *(4 punti) Si determinino i modi che caratterizzano tale sistema indicandone i parametri che ad essi corrispondono (costante di tempo, pulsazione naturale, smorzamento). Si valuti la stabilità dei singoli modi e si tracci qualitativamente il loro andamento in funzione del tempo. Si valuti quale sia il modo più lento e quello più veloce.*

   Il polinomio caratteristico della equazione omogenea associata a tale sistema vale

   $$D(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = s^3 + s^2 + 2s,$$

   e ha radici $p_1 = 0$ e $p, p' = \alpha \pm j\omega = -0.5 \pm j\frac{\sqrt{7}}{2} = -0.5 \pm j1.32$.

   Dunque avremo due modi:

   - Un modo aperiodico al limite di stabilità: $e^{0t} = 1$. Tale modo ha tempo di assestamento infinito e la sua costante di tempo non è definita.
   - Un modo pseudoperiodico stabile: $e^{\alpha t}\cos(\omega t) = e^{-0.5t}\cos(1.32t)$. Per tale modo la costante di tempo vale $\tau = -\frac{1}{\alpha} = 2$, la pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} = \sqrt{2} = 1.41$ e coefficiente di smorzamento $\zeta = -\frac{\alpha}{\omega_n} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.35$. Tale modo ha tempo di assestamento pari a $4 \div 5\tau$. E' l'unico modo convergente e, giocoforza, il più veloce.

   L'andamento nel tempo dei due modi è mostrato in figura 1.

2. *(6 punti) Si determini l'evoluzione libera a partire dall'istante iniziale $t_0 = 0$ date le condizioni iniziali*

   $$y_0 = y(t)|_{t=t_0} = 2, \qquad y'_0 = \left.\frac{d}{dt}y(t)\right|_{t=t_0} = 4, \qquad y''_0 = \left.\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right|_{t=t_0} = 1.$$

   La trasformata dell'evoluzione libera di un sistema lineare e stazionario del terzo ordine assume la forma

   $$Y_\ell(s) = \frac{(a_3 y_0)\, s^2 + (a_2 y_0 + a_3 y'_0)\, s + (a_1 y_0 + a_2 y'_0 + a_3 y''_0)}{D(s)} = \frac{2s^2 + 6s + 9}{s\,(s^2 + s + 2)}.$$

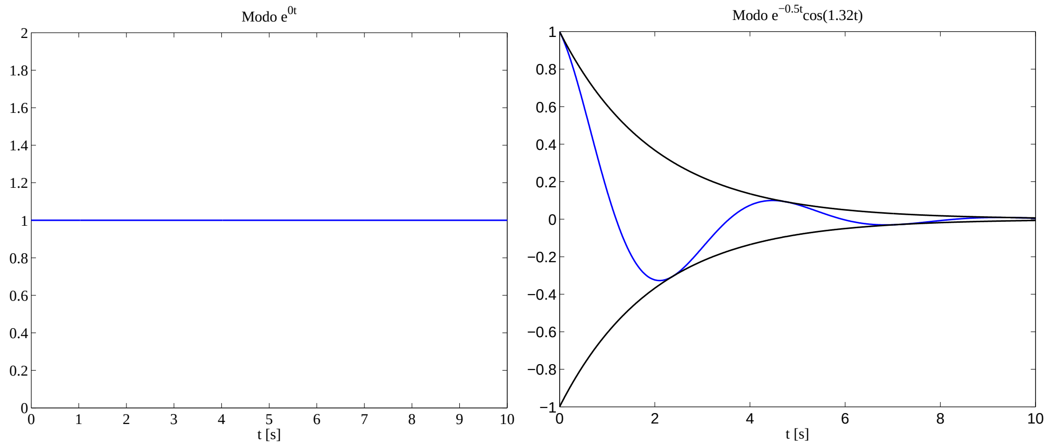

Figura 1: Evoluzione dei modi

Lo sviluppo di Heaviside di tale funzione vale;

$$Y_\ell(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R}{s+0.5-j1.32} + \frac{\overline{R}}{s+0.5+j1.32}$$

e vale

$$R_1 = \lim_{s\to 0} sY_\ell(s) = 4.5,$$

$$R = \lim_{s\to -0.5+j1.32} (s+0.5-j1.32)Y_\ell(s) = -\frac{5}{4} - j\frac{11}{4\sqrt{7}} = -1.25 - j1.04 = u + jv.$$

Dunque

$$M = \sqrt{u^2+v^2} = 1.63, \qquad \phi = \arctan\left(\frac{v}{u}\right) = \arctan\left(\frac{-1.04}{-1.25}\right) = -2.45 \text{ rad},$$

e antitrasformando si ottiene

$$y_\ell(t) = \big(R_1 + 2Me^{\alpha t}\cos(\omega t+\phi)\big)\,\delta_{-1}(t) = \big(4.5 + 3.26e^{-0.5t}\cos(1.32t-2.45)\big)\,\delta_{-1}(t).$$

Un'altra possibile forma della evoluzione libera è la seguente:

$$y_\ell(t) = \big(4.5 - 2.5e^{-0.5t}\cos(1.32t) + 2.08e^{-0.5t}\sin(1.32t)\big)\,\delta_{-1}(t).$$

3. *(4 punti) Si valuti, senza calcolarla esplicitamente, che struttura assume la risposta forzata $y_f(t)$ che consegue all'applicazione di un segnale di ingresso $u(t) = e^{-2t}\delta_{-1}(t)$. [Si scriva la $y_f(t)$ come la somma di due termini: un integrale particolare $y_{f.p}(t)$ e un integrale dell'omogenea $y_{f.o}(t)$.] Si ricordi il significato di risposta a regime e si valuti se essa esiste in questo caso.*

La funzione di trasferimento di tale sistema vale

$$W(s) = \frac{s+6}{s^3+s^2+2s} = \frac{N(s)}{D(s)}.$$

L'ingresso ha la forma $u(t) = e^{zt}$ con $z = -2$ e la corrispondente risposta forzata vale

$$y_f(t) = y_{f.p}(t) + y_{f.o}(t).$$

Il primo termine è un integrale particolare che, poiché z non è radice del polinomio caratteristico, vale

$$y_{f.p}(t) = \frac{N(z)}{D(z)} e^{-2t}\delta_{-1}(t) = -0.5e^{-2t}\delta_{-1}(t).$$

Il secondo termine è un integrale della omogenea e dunque assume la forma di una combinazione lineare di modi

$$y_{f.o}(t) = \left(A' + M'e^{-0.5t}\cos(1.32t+\phi')\right)\delta_{-1}(t),$$

ovvero la forma equivalente

$$y_{f.o}(t) = \left(A' + B'e^{-0.5t}\cos(1.32t) + C'e^{-0.5t}\sin(1.32t)\right)\delta_{-1}(t).$$

Il termine $y_{f.p}(t)$ non ha il significato di risposta a regime perché, non essendo tutti i modi del sistema stabili, il termine $y_{f.o}(t)$ non tende ad estinguersi per $t \to \infty$.

4. *(4 punti) Determinare una rappresentazione di tale sistema in termini di variabili di stato e darne una descrizione grafica mediante un diagramma a blocchi.*

La rappresentazione in variabili di stato è

$$\left\{ \begin{array}{ll} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_3} & -\frac{a_1}{a_3} & -\frac{a_2}{a_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a_3} \end{bmatrix} u(t) \\ & \\ y(t) & = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

ovvero, passando ai valori numerici,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ & \\ y(t) & = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Il diagramma a blocchi è mostrato in figura 2.

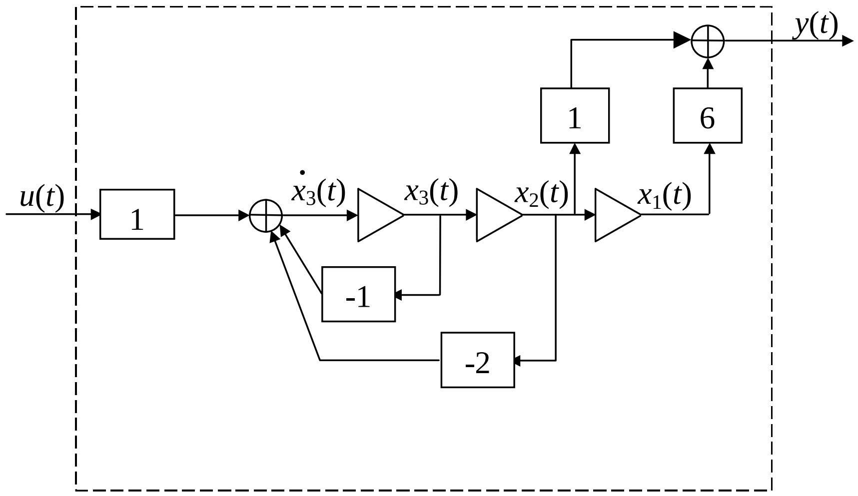

Figura 2: Diagramma a blocchi per il modello in variabili di stato determinato al punto 4.

5. *(6 punti) Si consideri la trasformazione di similitudine*

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e si determini a quale nuova rappresentazione tale trasformazione porti. Si dia una descrizione grafica mediante diagramma a blocchi anche della nuova rappresentazione.

La trasformazione di similitudine data T lega il vettore di stato originale $\vec{x}(t)$ al nuovo vettore di stato $\vec{z}(t)$ mediante la relazione

$$\vec{x}(t) = T\vec{z}(t).$$

La matrice inversa vale

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La nuova rappresentazione è dunque

$$\begin{aligned} A' &= T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ B' &= T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C' &= CT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \\ D' &= D = 0. \end{aligned}$$

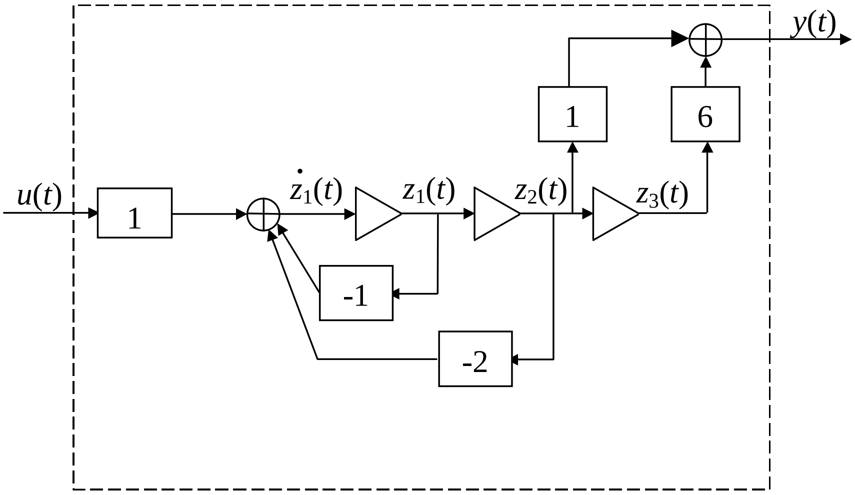

Figura 3: Diagramma a blocchi per il modello in variabili di stato determinato al punto 5.

Il diagramma a blocchi corrispondente, mostrato in figura 3, si costruisce tenendo conto che $\dot{z}_3 = z_2$ (dalla terza eq. di stato), $\dot{z}_2 = z_1$ (dalla seconda eq. di stato), e $\dot{z}_1 = -z_1 - 2z_2 + u$ (dalla prima eq. di stato).

Di questi risultati è possibile dare una semplice interpretazione fisica. Si osservi che la matrice T è una matrice di permutazione per cui vale

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_3(t) \\ z_2(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix},$$

e dunque la trasformazione scambia la prima componente con la terza.

E' facile capire perché la matrice T^{-1} in questo caso coincida con la matrice T stessa. Infatti l'operatore T scambia la prima componente e la terza e, riapplicando lo stesso operatore, si ritorna al vettore iniziale, ovvero $TT\vec{z}(t) = \vec{z}(t)$ e dunque $TT = I$.

Per lo stesso motivo è intuitivo attendersi che i due diagrammi a blocchi siano identici a meno di una rinumerazione delle componenti del vettore di stato.

6. *(6 punti) Si determini a partire dal modello ingresso-uscita la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema. Se ne tracci il diagramma di Bode.*

La funzione di trasferimento in forma di Bode vale

$$W(s) = \frac{s+6}{s^3 + s^2 + 2s} = \frac{3\,(1 + \frac{1}{6}s)}{1 + 0.5s + 0.5s^2}.$$

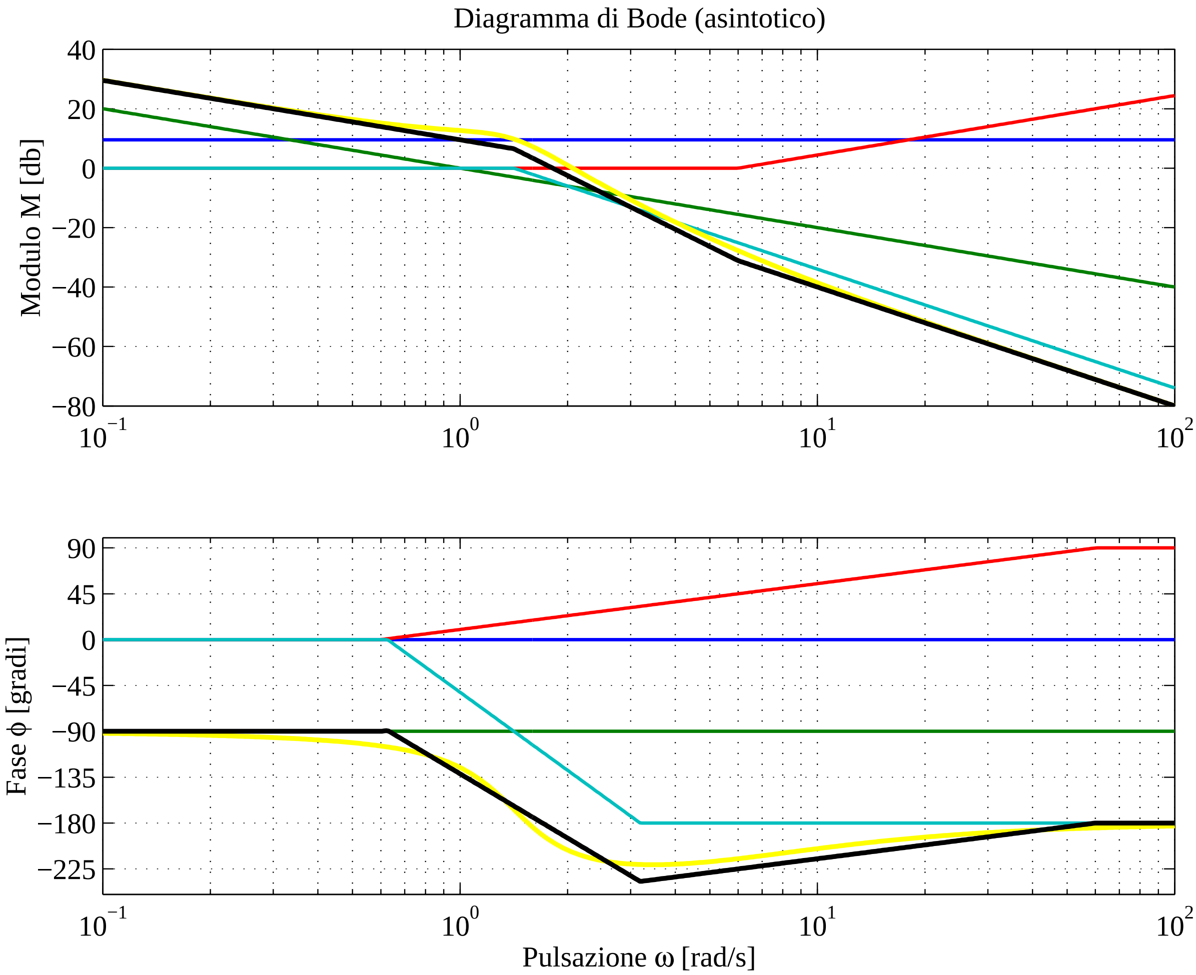

Figura 4: Diagramma di Bode.

Dunque i parametri significativi sono:

Guadagno	$K = 3,$	$K_{db} = 10;$	
Numero poli nell'origine	$\nu = 1;$		
Zero reale	$z = -6,$	$\tau = \frac{1}{6} = 0.1\bar{6},$	$1/\lvert\tau\rvert = 6;$
Coppia di poli complessi	$p, p' = -0.5 \pm j\frac{\sqrt{7}}{2},$	$\omega_n = \sqrt{2},$	$\zeta = 0.35,$
	$\Delta M_{db} = +2,$	$\omega_s = 0.63,$	$\omega_d = 3.2.$

e il diagramma è mostrato in figura 4.