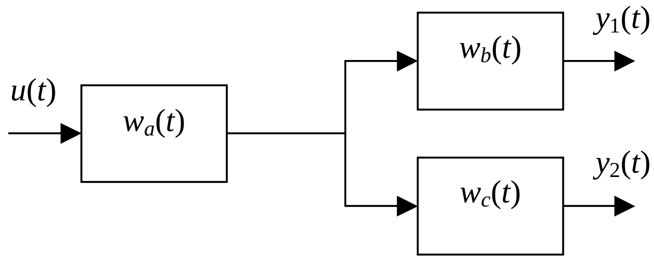
Analisi dei Sistemi

Soluzione del compito del 23 Gennaio 2003

Esercizio 1. *Il sistema in figura è caratterizzato dalle risposte impulsive dei singoli blocchi, e vale:*

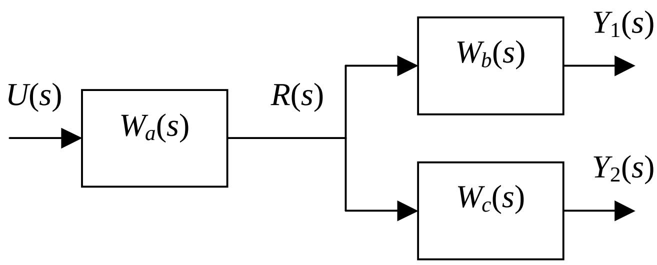
$$w_a(t) = (e^{-t} + e^{-3t})\delta_{-1}(t); \qquad w_b(t) = 4\delta_{-1}(t); \qquad w_c(t) = 2\delta(t).$$



1. *(4 punti) Si calcolino le funzioni di trasferimento*

$$W_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} \quad e \quad W_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)}.$$

Trasformando secondo Laplace le singole risposte impulsive si ottiene il diagramma seguente dove i singoli blocchi sono caratterizzati dalle loro funzioni di trasferimento e dove abbiamo chiamato $R(s)$ la trasformata del segnale in uscita del primo blocco.



Vale

$$W_a(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)}; \qquad W_b(s) = \frac{4}{s}; \qquad W_c(s) = 2.$$

Dunque

$$Y_1(s) = W_b(s)R(s) = W_b(s)W_a(s)U(s) = W_1(s)U(s),$$
$$Y_2(s) = W_c(s)R(s) = W_c(s)W_a(s)U(s) = W_2(s)U(s),$$

da cui infine si ottiene

$$W_1(s) = W_b(s)W_a(s) = \frac{8(s+2)}{s(s+1)(s+3)} \qquad \text{e} \qquad W_2(s) = W_c(s)W_a(s) = \frac{4(s+2)}{(s+1)(s+3)}.$$

2. *(4 punti) Si calcoli la risposta forzata $y_1(t)$ del sistema conseguente all'applicazione del segnale d'ingresso $u(t) = 2\delta_{-1}(t)$.*

   Vale
   $$Y_1(s) = W_1(s)U(s) = \frac{8(s+2)}{s(s+1)(s+3)} \cdot \frac{2}{s} = \frac{16(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)}.$$

   Lo sviluppo di Heaviside di tale funzione vale:
   $$Y_1(s) = \frac{-80/9}{s} + \frac{32/3}{s^2} + \frac{8}{s+1} + \frac{8/9}{s+3},$$

   e antitrasformando si ottiene
   $$y_1(t) = \left(-\frac{80}{9} + \frac{32}{3}t + 8e^{-t} + \frac{8}{9}e^{-3t}\right)\delta_{-1}(t).$$

3. *(4 punti) Si dia la definizione di stabilità BIBO, ricordando in che modo essa, nel caso di un sistema lineare e stazionario, sia legata alla risposta impulsiva e ai modi. Considerati separatamente i due sottosistemi descritti dalle funzioni trasferimento $W_1(s)$ e $W_2(s)$, si valuti la loro stabilità in senso BIBO.*

   La stabilità BIBO implica che ad ogni ingresso limitato corrisponda una uscita limitata. Un sistema è BIBO stabile se e solo se la risposta impulsiva è sommabile, ossia se e solo se tutti i modi che compaiono nella risposta impulsiva corrispondono a radici a parte reale negativa.

   La funzione di trasferimento $W_1(s)$ del primo sottosistema ha poli $p_1 = 0, p_2 = -1; p_3 = -3$. Poiché tale funzione di trasferimento è in forma minima (non vi sono cancellazioni zero-polo) la risposta impulsiva conterrà tre modi, uno associato ad ogni polo e la presenza di un polo a parte reale nulla implica che il sistema non sia BIBO stabile.

   La funzione di trasferimento $W_2(s)$ del secondo sottosistema ha poli $p_1 = -1; p_2 = -3$. La presenza di soli poli a parte reale negativa implica che il sistema è BIBO stabile.

Esercizio 2. *Sia data la seguente rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -14 & -16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 2u(t) \end{array}\right. \tag{1}$$

1. *(4 punti) Individuare le proprietà strutturali che caratterizzano tale modello: lineare o non lineare; stazionario o tempovariante; dinamico o istantaneo; a parametri concentrati o distribuiti; con o senza elementi di ritardo; proprio (strettamente o meno) o improprio. Motivare le risposte.*

   Il sistema descritto dal modello (1) è:

   - lineare: la rappresentazione è nella forma standard
     $$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{\vec{x}}(t) & = & A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \\ \vec{y}(t) & = & C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t) \end{array}\right. \tag{2}$$
     costituita da n equazioni differenziali lineari del primo ordine e da una trasformazione lineare d'uscita
   - stazionario: le matrici A, B, C, D sono costanti e non dipendono dal tempo;
   - dinamico: il sistema di equazioni è di ordine $n = 2 > 0$;
   - a parametri concentrati: non vi sono derivate parziali;
   - senza elementi di ritardo: non vi sono argomenti in t e argomenti traslati nel tempo della forma $(t - T)$;

- proprio ma non strettamente: un modello della forma (2) descrive sempre un sistema proprio ed in particolare strettamente proprio se e solo la matrice D è nulla (in questo caso invece $D = 2$).

2. *(4 punti) Si determini, mediante lo sviluppo di Sylvester, la matrice di transizione dello stato di tale rappresentazione. Si calcoli l'evoluzione libera dello stato e dell'uscita a partire da un istante iniziale $t_0 = 0$ in cui lo stato vale $x(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^T$.*

   La matrice A ha polinomio caratteristico $P(\lambda) = (\lambda + 14)(\lambda - 10) + 144 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$ le cui radici sono -2 e -2. La matrice A ha dunque un unico autovalore $\lambda_1 = -2$ di molteplicità doppia.

   In tal caso per determinare la matrice e^{At} mediante lo sviluppo di Sylvester scriviamo il sistema

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} &= \alpha_0(t) + \lambda_1 \alpha_1(t) \\ te^{\lambda_1 t} &= \alpha_1(t) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} e^{-2t} &= \alpha_0(t) - 2\alpha_1(t) \\ te^{-2t} &= \alpha_1(t) \end{cases}$$

   da cui si ricava

$$\begin{cases} \alpha_0(t) &= e^{-2t} + 2te^{-2t} \\ \alpha_1(t) &= te^{-2t} \end{cases}$$

   Dunque

$$\begin{aligned} e^{At} &= \alpha_0(t) I_2 + \alpha_0(t) A = (e^{-2t} + 2te^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{-2t} \begin{bmatrix} -14 & -16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (e^{-2t} - 12te^{-2t}) & -16te^{-2t} \\ 9te^{-2t} & (e^{-2t} + 12te^{-2t}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

   Possiamo dunque calcolare immediatamente l'evoluzione libera dello stato che per $t \geq 0$ vale:

$$\vec{x}_\ell(t) = e^{At}\,\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} (e^{-2t} - 12te^{-2t}) & -16te^{-2t} \\ 9te^{-2t} & (e^{-2t} + 12te^{-2t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2e^{-2t} - 24te^{-2t}) \\ 18te^{-2t} \end{bmatrix}$$

   mentre l'evoluzione libera dell'uscita per $t \geq 0$ vale:

$$y_\ell(t) = C\vec{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2e^{-2t} - 24te^{-2t}) \\ 18te^{-2t} \end{bmatrix} = (e^{-2t} - 12te^{-2t})$$

3. *(4 punti) La funzione di trasferimento del sistema descritto dalla (1) vale*

$$W(s) = \frac{2s^2 + 8.75s + 0.5}{s^2 + 4s + 4}.$$

   Si riconduca tale funzione alla forma di Bode indicando tutti i fattori che la compongono e i loro parametri significativi.

   Possiamo dare due diverse rappresentazioni in forma di Bode di tale funzione (entrambe sono corrette).

$$W(s) = \frac{0.125\,(1 + 0.232s)(1 + 17.3s)}{(1 + 0.5s)^2} = \frac{0.125\,(1 + 0.232s)(1 + 17.3s)}{(1 + s + 0.25s^2)}.$$

Prima rappresentazione
Consideriamo il termine $(s^2+4s+4) = 4(1+0.5s)^2$ al denominatore come il prodotto di due termini monomi.

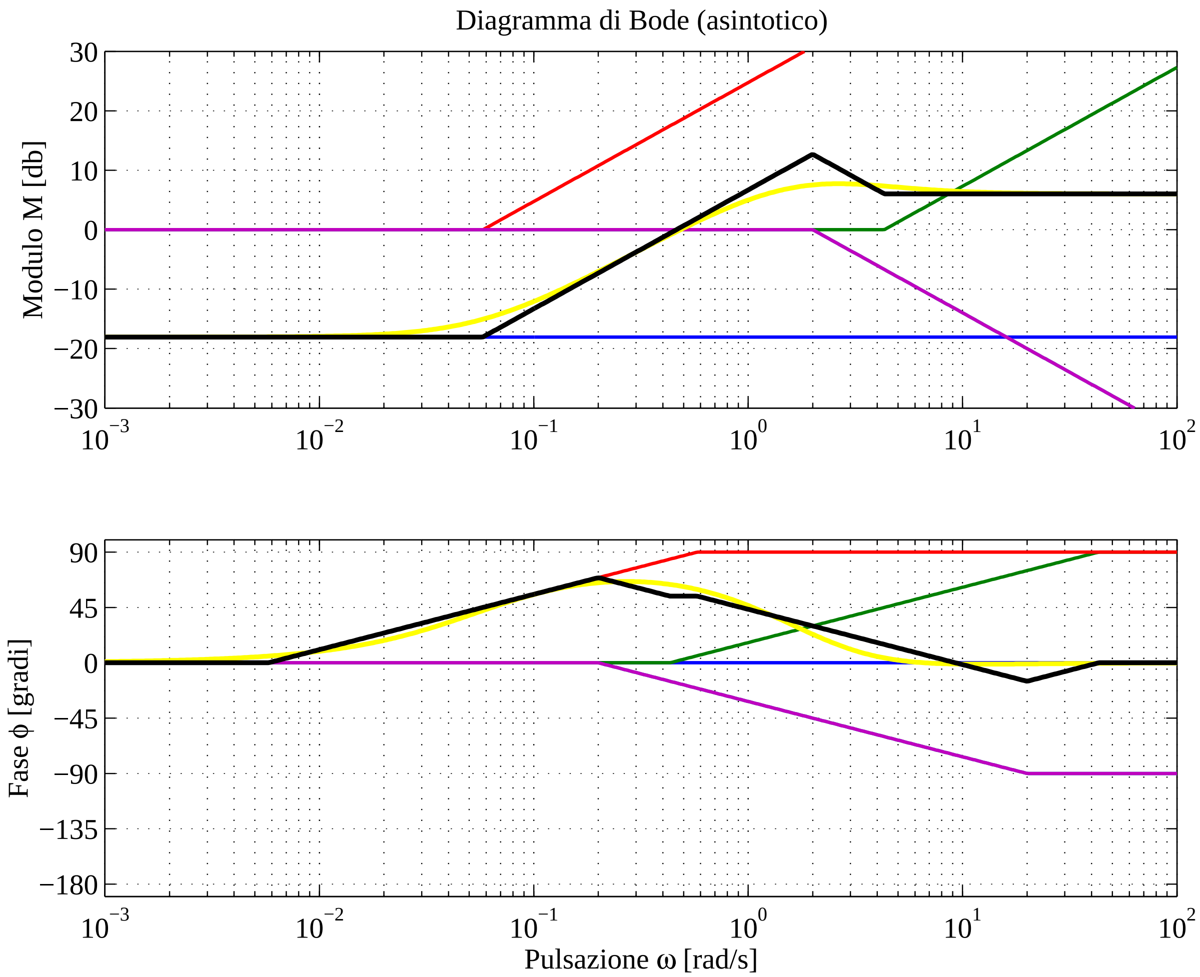
Guadagno	$K = 0.125,$	$K_{db} = -18;$	
Numero poli nell'origine	$\nu = 0;$		
Zero reale	$z = -4.32,$	$\tau = 0.232,$	$1/\lvert\tau\rvert = 4.32;$
Zero reale	$z = -0.058,$	$\tau = 17.3,$	$1/\lvert\tau\rvert = 0.058;$
Polo reale	$z = -2,$	$\tau = 0.5,$	$1/\lvert\tau\rvert = 2;$
Polo reale	$z = -2,$	$\tau = 0.5,$	$1/\lvert\tau\rvert = 2;$

Seconda rappresentazione
Consideriamo il termine $(s^2+4s+4) = 4(1+s+0.25s^2)$ al denominatore come un termine trinomio con $\zeta = 1$.

Guadagno	$K = 0.125,$	$K_{db} = -18;$	
Numero poli nell'origine	$\nu = 0;$		
Zero reale	$z = -4.32,$	$\tau = 0.232,$	$1/\lvert\tau\rvert = 4.32;$
Zero reale	$z = -0.058,$	$\tau = 17.3,$	$1/\lvert\tau\rvert = 0.058;$
Coppia di poli complessi	$p, p' = -2 \pm j0,$	$\omega_n = 2,$	$\zeta = 1,$
	$\Delta M_{db} = -6,$	$\omega_s = 0.2,$	$\omega_d = 20.$

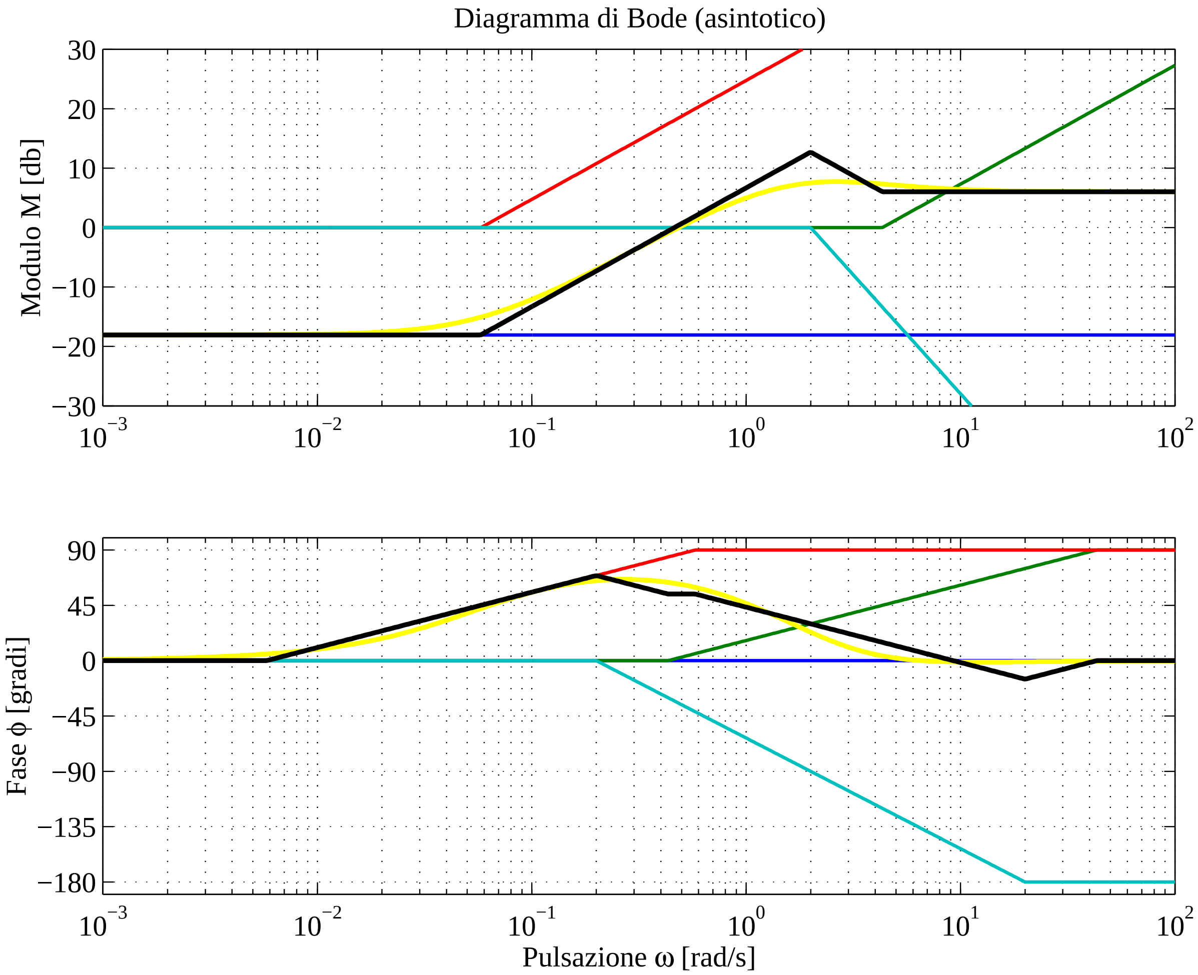
4. *(6 punti) Si tracci il diagramma di Bode della $W(j\omega)$ su carta semilogaritmica.*

Il diagramma di Bode nel primo caso assume questa forma:



dove il termine in viola (associato al polo -2) va contato due volte sia nei diagrammi dei moduli che delle fasi.

Il diagramma di Bode nel secondo caso assume questa forma:



Ovviamente i diagrammi risultanti nei due casi coincidono.