Analisi dei Sistemi

Soluzione II pre-esame
20 Dicembre 2002

Esercizio 1. *Si consideri un sistema lineare e stazionario la cui funzione di trasferimento vale:*

Caso 1 $$W(s) = \frac{20s + 20}{s^3 - 2s^2 + 25s}.$$

Caso 2 $$W(s) = \frac{20s + 4}{-s^3 + 1.8s^2 - 36s}.$$

Caso 3 $$W(s) = \frac{20s - 6}{s^3 - 2.8s^2 + 49s}.$$

Caso 4 $$W(s) = \frac{20s - 8}{-s^3 + 2.4s^2 - 64s}.$$

1. *(3 punti) Si riconduca tale funzione alla forma di Bode indicando tutti i fattori che la compongono e i loro parametri significativi.*

Caso 1 $$W(s) = 0.8\frac{1 + s}{s(1 - \frac{4}{50}s + \frac{1}{25}s^2)}$$

Guadagno	$K = 0.8,$	$K_{db} = -2;$	
Numero poli nell'origine	$\nu = 1;$		
Zero reale	$z = -1,$	$\tau = 1,$	$1/\lvert\tau\rvert = 1;$
Coppia di poli complessi	$p, p' = 1 \pm j4.90,$	$\omega_n = 5,$	$\zeta = -0.2,$
	$\Delta M_{db} = +8,$	$\omega_s = 3.2,$	$\omega_d = 8.$

Caso 2 $$W(s) = -\frac{1}{9}\frac{1 + 5s}{s(1 - \frac{3}{60}s + \frac{1}{35}s^2)}$$

Guadagno	$K = -1.\overline{1},$	$K_{db} = -19;$	
Numero poli nell'origine	$\nu = 1;$		
Zero reale	$z = -0.2,$	$\tau = 5,$	$1/\lvert\tau\rvert = 0.2;$
Coppia di poli complessi	$p, p' = 0.9 \pm j5.93,$	$\omega_n = 6,$	$\zeta = -0.15,$
	$\Delta M_{db} = +10,$	$\omega_s = 4.2,$	$\omega_d = 8.5.$

Caso 3 $W(s) = -0.1225\dfrac{1 - 3.\bar{3}s}{s(1 - \frac{4}{70}s + \frac{1}{49}s^2)}$

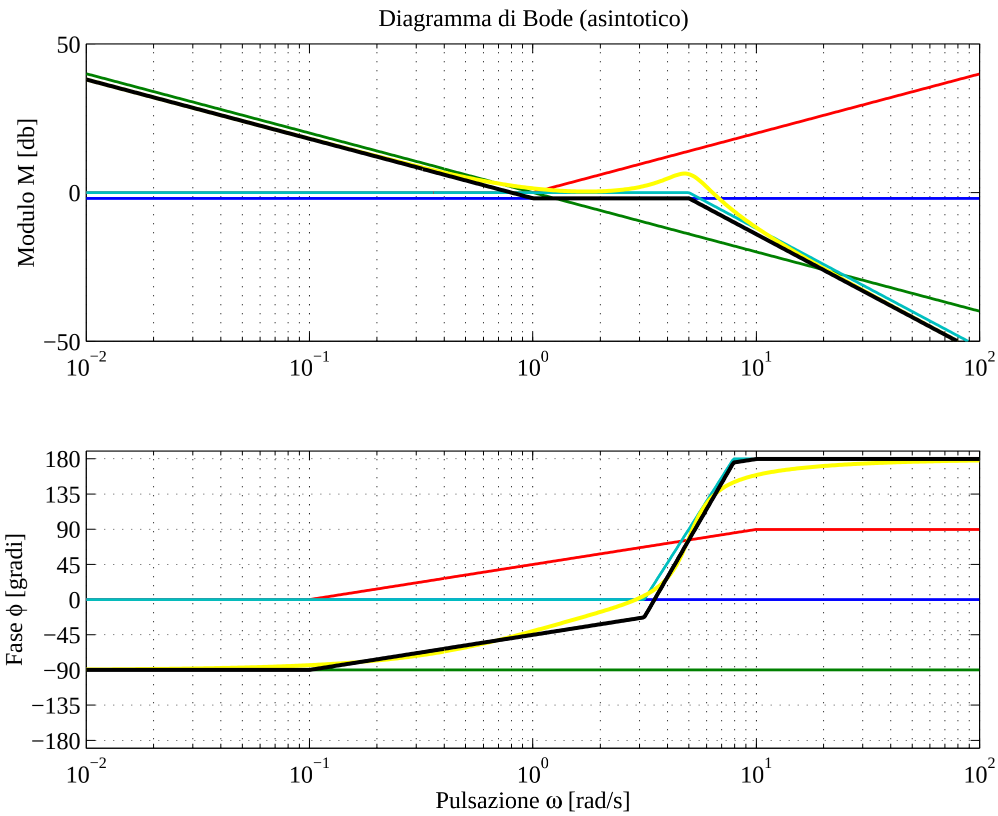
Guadagno	$K = -0.1225,$	$K_{db} = -18;$	
Numero poli nell'origine	$\nu = 1;$		
Zero reale	$z = 0.3,$	$\tau = -10/3,$	$1/\lvert\tau\rvert = 0.3;$
Coppia di poli complessi	$p, p' = 1.4 \pm j6.86,$	$\omega_n = 7,$	$\zeta = -0.2,$
	$\Delta M_{db} = +8,$	$\omega_s = 4.4,$	$\omega_d = 11.$

Caso 4 $W(s) = 0.125\dfrac{1 - 2.5s}{s(1 - \frac{3}{80}s + \frac{1}{64}s^2)}$

Guadagno	$K = 0.125,$	$K_{db} = -18;$	
Numero poli nell'origine	$\nu = 1;$		
Zero reale	$z = 0.4,$	$\tau = -2.5,$	$1/\lvert\tau\rvert = 0.4;$
Coppia di poli complessi	$p, p' = 1.2 \pm j7.91,$	$\omega_n = 8,$	$\zeta = -0.15,$
	$\Delta M_{db} = +10,$	$\omega_s = 5.7,$	$\omega_d = 11.$

2. *(5 punti) Si tracci il diagramma di Bode della $W(j\omega)$ su carta semilogaritmica.*

Caso 1



Caso 2

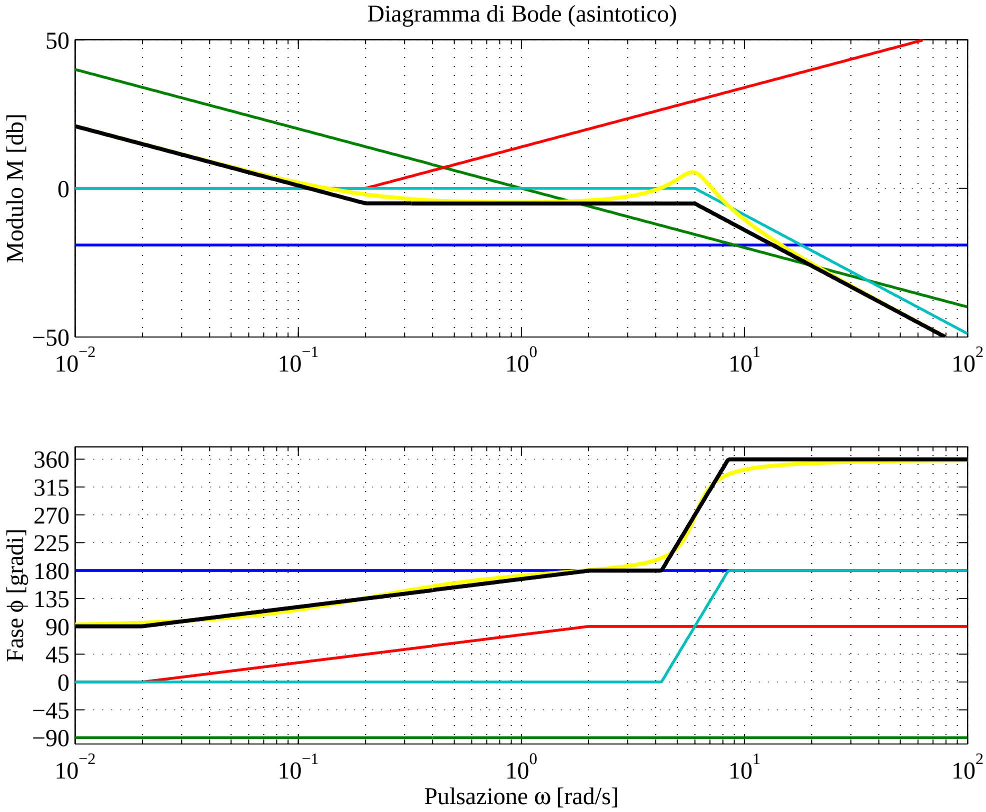


Diagramma di Bode (asintotico)
Modulo M [db]
50
0
−50
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Fase ϕ [gradi]
360
315
270
225
180
135
90
45
0
−45
−90
Pulsazione ω [rad/s]

Caso 3

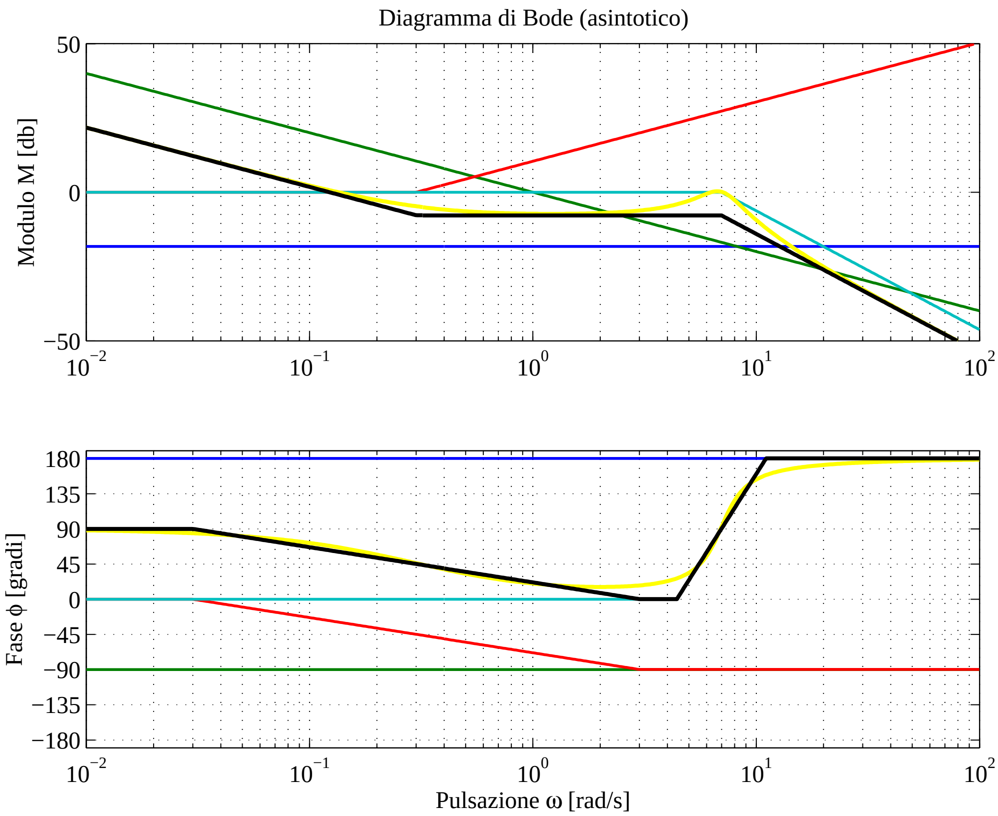
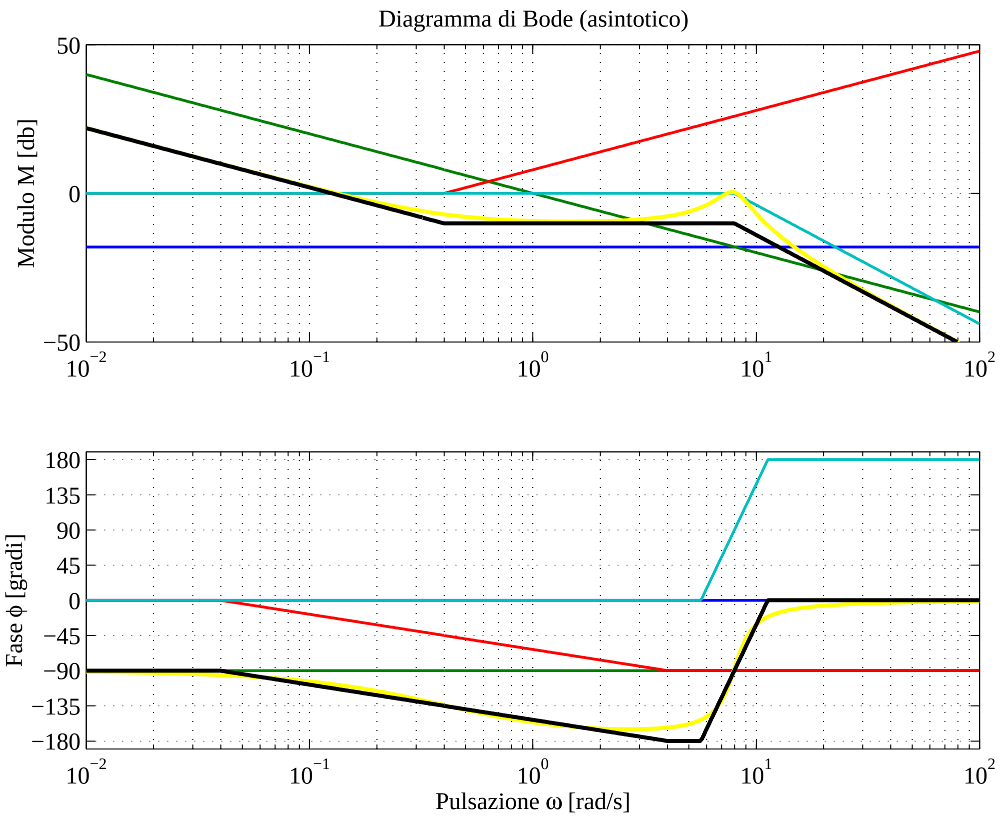


Diagramma di Bode (asintotico)
Modulo M [db]
50
0
−50
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Fase ϕ [gradi]
180
135
90
45
0
−45
−90
−135
−180
Pulsazione ω [rad/s]

Caso 4



3. *(2 punti) Si discuta se tale diagramma ha il significato fisico di risposta a regime motivando la risposta.*

   In nessuno dei quattro casi il diagramma ha il significato fisico di risposta a regime perché non tutti i poli hanno parte reale negativa: infatti vi è un polo nell'origine e una coppia di poli complessi e coniugati a parte reale positiva ($\zeta < 0$).

4. *(2 punti) Si ricordi la definizione di modulo e pulsazione alla risonanza. Tali parametri sono definiti per la funzione di trasferimento data? Se si, determinarne il valore dal grafico tracciato al punto 2.*

   Il modulo alla risonanza M_r indica il massimo valore della curva dei moduli (se esiste al finito) che si raggiunge in corrispondenza della pulsazione ω_r detta pulsazione di risonanza. In questo caso tali valori non sono definiti. Si noti, tuttavia, che le curve dei moduli presentano dei massimi locali in corrispondenza della pulsazione naturale ω_n del termine trinomio al denominatore.

Esercizio 2. *È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u(t). \end{cases}$$

dove

Caso 1 $k = 4$;

Caso 2 $k = 3$;

Caso 3 $k = 2$;

Caso 4 $k = 1$.

1. *(5 punti) Dato un istante iniziale $t_0 = 0$, si determini mediante l'uso delle trasformate di Laplace l'evoluzione dello stato e dell'uscita a partire da condizioni iniziali $x_1(t_0) = k$, $x_2(t_0) = 1$ e conseguente all'applicazione di un ingresso*

$$u(t) = \delta_{-1}(t),$$

indicando i due termini che corrispondono all'evoluzione libera e all'evoluzione forzata.

La matrice risolvente vale:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{k}{s(s+k)} \\ 0 & \frac{1}{s+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+k}\right) \\ 0 & \frac{1}{s+k} \end{bmatrix}.$$

Inoltre la trasformata dell'ingresso vale $U(s) = \frac{1}{s}$.

Evoluzione libera

La trasformata dell'evoluzione libera dello stato vale:

$$X_\ell(s) = (sI - A)^{-1}\vec{x}(t_0) = (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k}{s} + \frac{k}{s(s+k)} \\ \frac{1}{s+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k+1}{s} - \frac{1}{s+k} \\ \frac{1}{s+k} \end{bmatrix}$$

mentre la trasformata dell'evoluzione libera dell'uscita vale:

$$Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1}\vec{x}(t_0) = CX_\ell(s) = \frac{2k}{s} + \frac{2k}{s(s+k)} = \frac{2(k+1)}{s} - \frac{2}{s+k}$$

Antitrasformando otteniamo che l'evoluzione libera dello stato vale per $t \geq 0$

$$\vec{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} k + 1 - e^{-kt} \\ e^{-kt} \end{bmatrix}$$

e l'evoluzione libera dell'uscita vale per $t \geq 0$

$$y_\ell(t) = C\vec{x}_\ell(t) = 2(k+1) - 2e^{-kt}.$$

Evoluzione forzata

La trasformata dell'evoluzione forzata dello stato vale:

$$X_f(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} - \frac{k}{s^2(s+k)} \\ \frac{1}{s(s+k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1/k}{s} - \frac{1/k}{s+k} \\ -\frac{1/k}{s} + \frac{1/k}{s+k} \end{bmatrix}$$

mentre la trasformata dell'evoluzione forzata dell'uscita vale:

$$Y_f(s) = \left(C(sI - A)^{-1}B + D\right)U(s) = CX_f(s) + DU(s) = \frac{2/k}{s} - \frac{2/k}{s+k} + \frac{1}{s}$$

Antitrasformando otteniamo che l'evoluzione forzata dello stato è nulla per $t < 0$, mentre per $t \geq 0$ vale

$$\vec{x}_f(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \\ -\frac{1}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \end{bmatrix}$$

e l'evoluzione forzata dell'uscita è nulla per $t < 0$, mentre per $t \geq 0$ vale

$$y_f(t) = C\vec{x}_f(t) + 2u(t) = \left(1 + \frac{2}{k} - \frac{2}{k}e^{-kt}\right).$$

2. *(2 punti) Si determini la funzione di trasferimento e si valuti la stabilità BIBO del sistema descritto da tale modello.*

   La funzione di trasferimento vale

   $$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s + 2 + k}{s + k}.$$

   In tale funzione compare solo un polo $p = -k < 0$, dunque essendo tutti i poli a parte reale negativa il sistema è BIBO stabile.

3. *(2 punti) Si valuti la stabilità secondo Lyapunov del sistema descritto da tale modello, individuando tutti i possibili stati di equilibrio.*

   Per valutare la stabilità secondo Lyapunov occorre calcolare gli autovalori della matrice A che in questo caso valgono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -k$ (la matrice è triangolare e dunque gli autovalori compaiono lungo la diagonale). Dunque oltre all'autovalore λ_2 a parte reale negativa (che concide con il polo p della funzione di trasferimento) compare anche un autovalore a parte reale nulla: ciò implica che il sistema è stabile ma non asintoticamente.

4. *(3 punti) Si valuti l'osservabilità e la controllabilità della rappresentazione.*

   La matrice di controllabilità vale

   $$C_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ -1 & k \end{bmatrix}$$

   ed essendo il suo determinante 0 essa ha rango $r = 1 < n = 2$: il sistema non è controllabile.

   La matrice di osservabilità vale

   $$C_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2k \end{bmatrix}$$

   ed essendo il suo determinante $4k \neq 0$ essa ha rango $r = 2 = n$: il sistema è osservabile.

5. *(2 punti) Si confrontino i risultati ottenuti ai punti 2, 3 e 4 discutendone gli eventuali legami.*

   Il sistema è stabile ma non asintoticamente a causa dell'autovalore $\lambda_1 = 0$; se tale autovalore fosse anche un polo della funzione di trasferimento il sistema non sarebbe BIBO stabile. Tuttavia abbiamo osservato che il sistema è BIBO stabile perché la funzione di trasferimento non contiene un polo $p = 0$.

   Ciò è dovuto al fatto che un modo non controllabile o non osservabile non compare nella risposta impulsiva: in particolare, in questo caso capita che sia appunto il modo associato a λ_1 ad essere non controllabile.

Esercizio 3. *Si consideri un sistema lineare e stazionario la cui funzione di trasferimento vale:*

Caso 1 $$W(s) = \frac{s+4}{(4+k)s^3 + 7s^2 + 12s + 9}.$$

Caso 2 $$W(s) = \frac{s+4}{4s^3 + (7+k)s^2 + 12s + 9}.$$

Caso 3 $$W(s) = \frac{s+4}{4s^3 + 7s^2 + (12+k)s + 9}.$$

Caso 4 $$W(s) = \frac{s+4}{4s^3 + 7s^2 + 12s + (9+k)}.$$

1. *(4 punti) Si valuti mediante il criterio di Routh per quali valori del parametro $k \in (-\infty, \infty)$ tale sistema è stabile.*

   Costruiamo la tabella di Routh nei quattro casi:

   Caso 1:
   $$\begin{array}{c|cc} 3 & 4+k & 12 \\ 2 & 7 & 9 \\ 1 & 48-9k & \\ 0 & 9 & \end{array}$$

   Caso 2:
   $$\begin{array}{c|cc} 3 & 4 & 12 \\ 2 & 7+k & 9 \\ 1 & 48+12k & \\ 0 & 9 & \end{array}$$

   Caso 3:
   $$\begin{array}{c|cc} 3 & 4 & 12+k \\ 2 & 7 & 9 \\ 1 & 48+7k & \\ 0 & 9 & \end{array}$$

   Caso 4:
   $$\begin{array}{c|cc} 3 & 4 & 12 \\ 2 & 7 & 9+k \\ 1 & 48-4k & \\ 0 & 9+k & \end{array}$$

   Affinché il sistema sia stabile occorre che lungo la prima colonna non compaiano variazioni di segno. Gli intervalli per cui si ha stabilità sono dunque i seguenti.

   Caso 1 $k \in (-4, \frac{48}{9})$.
   Per $k = -4$ il sistema è stabile (ma diventa di ordine 2). Per $k = 48/9 = 5.\overline{3}$ è al limite di stabilità avendo una coppia di poli immaginari coniugati $\pm j\frac{3}{\sqrt{7}}$.

   Caso 2 $k \in (-4, +\infty)$.
   Per $k = -4$ il sistema è al limite di stabilità avendo una coppia di poli immaginari coniugati $\pm j\sqrt{3}$.

   Caso 3 $k \in (-\frac{48}{7}, +\infty)$.
   Per $k = -48/7 = -6.86$ è al limite di stabilità avendo una coppia di poli immaginari coniugati $\pm j\frac{3}{\sqrt{7}}$.

   Caso 4 $k \in (-9, 12)$.
   Per $k = -9$ il sistema è al limite di stabilità avendo un polo in $p = 0$. Per $k = 12$ è ancora al limite di stabilità avendo una coppia di poli immaginari coniugati $\pm j\sqrt{3}$.