Analisi dei Sistemi

Pre-esame 2 Novembre 2002

Esercizio 1. *Si consideri un sistema descritto dal seguente modello ingresso-uscita dove ϱ e η sono parametri reali costanti.*

1. *(4 punti) Individuare le proprietà strutturali che caratterizzano tale modello: lineare o non lineare; stazionario o tempo-variante; dinamico o istantaneo; a parametri concentrati o distribuiti; con o senza elementi di ritardo; proprio (strettamente o meno) o improprio. Indicare inoltre se il valore dei parametri ϱ e η possa modificare tali proprietà. E' necessario motivare ogni risposta.*

Caso 1 $$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\varrho t\frac{dy(t)}{dt} + 7y(t) = 3\frac{d^3u(t)}{dt^3} + \eta t.$$

Tale modello è lineare solo se $\eta = 0$, stazionario solo se $\eta = \varrho = 0$, dinamico, a parametri concentrati, senza elementi di ritardo, proprio ma non strettamente.

Caso 2 $$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^\eta + 7y(t) = 3\frac{d^3u(t)}{dt^3} + (\varrho + t)u(t).$$

Tale modello è lineare solo se $\eta = 1$, tempovariante, dinamico, a parametri concentrati, senza elementi di ritardo, proprio ma non strettamente.

Caso 3 $$\eta\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 7t^\varrho y(t) = 3\frac{d^3u(t)}{dt^3}.$$

Tale modello è lineare, stazionario solo se $\varrho = 0$, dinamico, a parametri concentrati, senza elementi di ritardo, proprio solo se $\eta \neq 0$ ma mai strettamente proprio.

Caso 4 $$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3(1 - \eta t)\frac{dy(t)}{dt} + 7y(t) = 3\varrho\frac{d^3u(t)}{dt^3}.$$

Tale modello è lineare, stazionario solo se $\eta = 0$, dinamico, a parametri concentrati, senza elementi di ritardo, sempre proprio e strettamente proprio solo se $\varrho = 0$.

Esercizio 2. *Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello:*

$$a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = 3\frac{du(t)}{dt} + u(t)$$

dove

Caso 1 $a_2 = 2$, $a_1 = 4$, $a_0 = 2$;

Caso 2 $a_2 = 3$, $a_1 = 12$, $a_0 = 12$;

Caso 3 $a_2 = 1$, $a_1 = 6$, $a_0 = 9$;

Caso 4 $a_2 = 2$, $a_1 = 16$, $a_0 = 32$.

1. *(4 punti) Determinare i modi di tale sistema e classificarli, indicando i loro parametri significativi. Tracciare il loro andamento qualitativo. (Tale domanda vuole valutare la preparazione generale: evitare risposte stringate).*

   Il sistema ha due modi aperiodici: $e^{\alpha t}, te^{\alpha t}$ di costante di tempo $\tau = -\frac{1}{\alpha}$ dove vale:

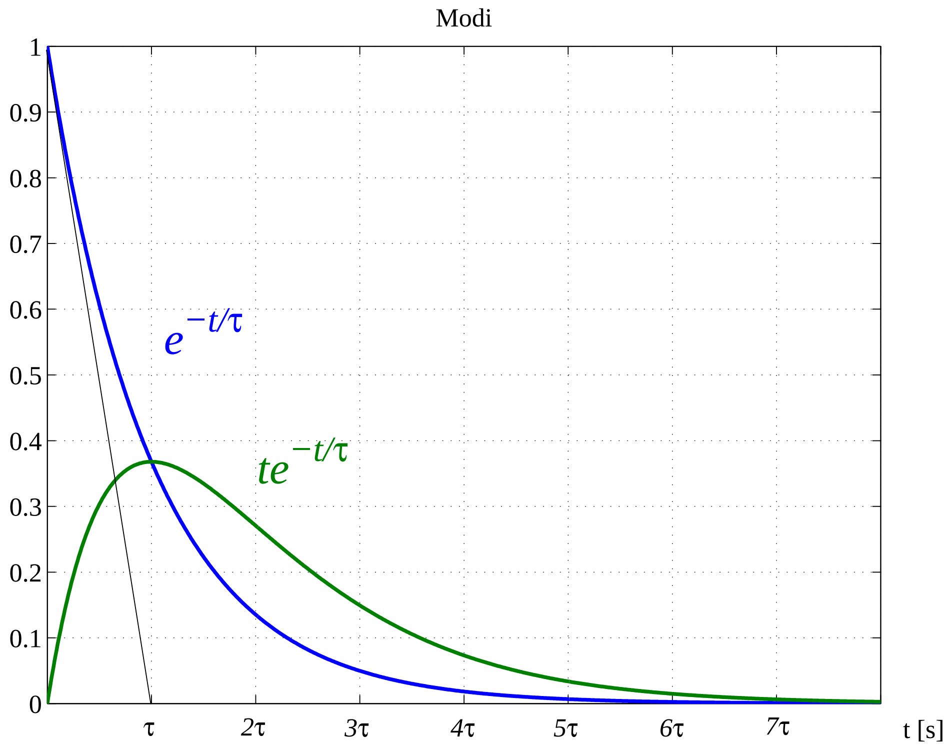
   Caso 1 $\alpha = -1$, $\tau = 1$;

   Caso 2 $\alpha = -2$, $\tau = 0.5$;

   Caso 3 $\alpha = -3$, $\tau = 0.\overline{3}$;

   Caso 4 $\alpha = -4$, $\tau = 0.25$.

   Il loro andamento è dato in figura.



2. *(4 punti) Definire il concetto di risposta impulsiva e calcolarne il valore per tale sistema.*
   Poiché il sistema è strettamente proprio la risposta impulsiva ha forma

$$w(t) = \left(h_1\, e^{\alpha t} + h_2\, t\, e^{\alpha t}\right)\ \delta_{-1}(t).$$

   Per calcolare i coefficienti incogniti:

   - Derivo due volte la $w(t)$, calcolando la $\dot{w}(t)$ e la $\ddot{w}(t)$ (tengo conto delle discontinuità nell'origine).

- Sostituisco la $w(t)$ e le sue derivate al primo membro della eq. differenziale, mentre al secondo membro sostituisco $u(t) = \delta(t)$, $\dot{u}(t) = \delta_1(t)$.
- Imponendo l'eguaglianza fra i coefficienti di $\delta(t)$ e $\delta_1(t)$ tra primo e secondo membro ottengo un sistema di due equazioni nelle due incognite h_1 e h_2.

Vale dunque:

Caso 1 $w(t) = (1.5\, e^{-t} - \; t\, e^{-t})\;\delta_{-1}(t)$;

Caso 2 $w(t) = \left(e^{-2t} - \frac{5}{3}\, t\, e^{-2t}\right)\;\delta_{-1}(t)$;

Caso 3 $w(t) = (3\, e^{-3t} - 8\, t\, e^{-3t})\;\delta_{-1}(t)$;

Caso 4 $w(t) = (1.5\, e^{-4t} - 5.5\, t\, e^{-4t})\;\delta_{-1}(t)$.

3. *(4 punti) Calcolare la risposta forzata di tale sistema soggetto all'azione di un ingresso*

$$u(t) = K_0\, e^{zt}\delta_{-1}(t),$$

individuando se possibile il termine permanente e quello transitorio.

Vale

Caso 1 $K_0 = 1$, $z = 1$*;*

Caso 2 $K_0 = 2$, $z = 2$*;*

Caso 3 $K_0 = 3$, $z = 3$*;*

Caso 4 $K_0 = 4$, $z = 4$.

L'ingresso è nella forma $K_0 e^{zt}\,\delta_{-1}(t)$ e $z > 0$ non è radice del polinomio caratteristico in nessuno dei casi. La risposta forzata ha forma

$$y_f(t) = \left(\underbrace{A e^{zt}}_{\text{permanente}} + \underbrace{\hat{h}_1\, e^{\alpha t} + \hat{h}_2\, t\, e^{\alpha t}}_{\text{transitorio}} \right)\;\delta_{-1}(t),$$

con:

$$A = K_0\,\frac{N(z)}{P(z)} = K_0\,\frac{3z+1}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0},$$

ovvero

Caso 1 $A = 0.5$;

Caso 2 $A = 0.292$;

Caso 3 $A = 0.8\overline{3}$;

Caso 4 $A = 0.4063$.

Per calcolare gli altri coefficienti incogniti noto il valore di A procedo come segue.

- Derivo due volte la $y_f(t)$, calcolando la $\dot{y}_f(t)$ e la $\ddot{y}_f(t)$ (tengo conto delle discontinuità nell'origine).
- Derivo la funzione $u(t)$ data, calcolando $\dot{u}(t)$ (tengo conto delle discontinuità nell'origine).
- Sostituisco la $y_f(t)$ e le sue derivate al primo membro della eq. differenziale, mentre al secondo membro sostituisco $u(t)$ e la sua derivata.

- Imponendo l'eguaglianza fra i coefficienti di $\delta(t)$ e $\delta_1(t)$ tra primo e secondo membro ottengo un sistema di due equazioni nelle due incognite $\hat{h}_1$ e $\hat{h}_2$.

Vale infine:

Caso 1 $y_f(t) = (0.5\,e^{t} - 0.5\,e^{-t} + 0.5\,t\,e^{-t})\ \delta_{-1}(t)$;
Caso 2 $y_f(t) = \left(0.292\,e^{2t} - 0.292\,e^{-2t} + 0.8\overline{3}\,t\,e^{-2t}\right)\ \delta_{-1}(t)$;
Caso 3 $y_f(t) = \left(0.8\overline{3}\,e^{3t} - 0.8\overline{3}\,e^{-3t} + 4\,t\,e^{-3t}\right)\ \delta_{-1}(t)$;
Caso 4 $y_f(t) = (0.4063\,e^{4t} - 0.4063\,e^{-4t} + 2.75\,t\,e^{-4t})\ \delta_{-1}(t)$.

Esercizio 3. *È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \end{cases}$$

dove

Caso 1 $k = 4$,

Caso 2 $k = 3$,

Caso 3 $k = 2$,

Caso 4 $k = 1$.

1. *(3 punti) Si determini, mediante lo sviluppo di Sylvester, la matrice di transizione dello stato.*

   Tale matrice è triangolare superiore e posso leggere gli autovalori lungo la diagonale. Vale $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -k$. Lo sviluppo di Sylvester ci da:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-kt} \\ 0 & e^{-kt} \end{bmatrix}.$$

   Vale quindi

   Caso 1 $e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-4t} \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}$;

   Caso 2 $e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$;

   Caso 3 $e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$;

   Caso 4 $e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$.

2. *(3 punti) Dato un istante iniziale $t_0 = 2$, si determini l'evoluzione libera dello stato e dell'uscita a partire da condizioni iniziali $x_1(t_0) = k$, $x_2(t_0) = 1$.*

   L'evoluzione libera dello stato vale per $t \geq 2$

$$\vec{x}_\ell(t) = e^{A(t-2)}\vec{x}(2) = \begin{bmatrix} (k + 1 - e^{-k(t-2)}) \\ e^{-k(t-2)} \end{bmatrix}$$

   e l'evoluzione libera dell'uscita vale per $t \geq 2$

$$y_\ell(t) = C\vec{x}_\ell(t) = Ce^{A(t-2)}\vec{x}(2) = 2(k+1) - 2e^{-k(t-2)}.$$

   Vale quindi

   Caso 1 $\vec{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} (5 - e^{-4(t-2)}) \\ e^{-4(t-2)} \end{bmatrix}, \quad y_\ell(t) = 10 - 2e^{-4(t-2)};$

   Caso 2 $\vec{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} (4 - e^{-3(t-2)}) \\ e^{-3(t-2)} \end{bmatrix}, \quad y_\ell(t) = 8 - 2e^{-3(t-2)};$

   Caso 3 $\vec{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} (3 - e^{-2(t-2)}) \\ e^{-2(t-2)} \end{bmatrix}, \quad y_\ell(t) = 6 - 2e^{-2(t-2)};$

   Caso 4 $\vec{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} (2 - e^{-(t-2)}) \\ e^{-(t-2)} \end{bmatrix}, \quad y_\ell(t) = 4 - 2e^{-(t-2)}.$

3. *(4 punti) Si determini l'evoluzione forzata dell'uscita che consegue all'applicazione di un ingresso*

$$\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ (6-k)\,\delta_{-1}(t) \end{bmatrix}.$$

   L'evoluzione forzata dell'uscita vale 0 per $t < 0$ e per $t \geq 0$ vale

$$\begin{aligned} y_f(t) &= Ce^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau + D\vec{u}(t) = Ce^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\begin{bmatrix} (6-k) \\ -(6-k) \end{bmatrix}d\tau + (6-k) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2(1-e^{-kt}) \end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{k\tau} \\ 0 & e^{k\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (6-k) \\ -(6-k) \end{bmatrix}d\tau + (6-k) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2(1-e^{-kt}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{(6-k)}{k}e^{k\tau} \\ -\frac{(6-k)}{k}e^{k\tau} \end{bmatrix}_0^t + (6-k) = \frac{2\,(6-k)}{k}\,(1-e^{-kt}) + (6-k) \end{aligned}$$

   e dunque

$$y_f(t) = \left(\frac{2\,(6-k)}{k}\,(1-e^{-kt}) + (6-k)\right)\delta_{-1}(t).$$

   Vale quindi

   Caso 1 $y_f(t) = (3 - e^{-4t})\,\delta_{-1}(t);$

   Caso 2 $y_f(t) = (5 - 2\,e^{-3t})\,\delta_{-1}(t);$

   Caso 3 $y_f(t) = (8 - 4\,e^{-2t})\,\delta_{-1}(t);$

   Caso 4 $y_f(t) = (15 - 10\,e^{-t})\,\delta_{-1}(t).$

4. *(4 punti) Si determini una trasformazione di similitudine che porti ad una rappresentazione in cui la matrice di stato è in forma diagonale. Determinare le matrici della nuova rappresentazione.*

   La matrice
$$A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & -k \end{bmatrix}$$
   ha autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -k$ e ad essi sono associati gli autovettori
$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$
   Si noti che tali autovalori non dipendono dal valore del parametro k.

   Dunque scegliendo la matrice modale
$$V = [\,\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$
   si ottiene
$$A' = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix},$$
$$B' = V^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$
$$C' = CV = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix},$$
$$D' = D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$