Analisi dei Sistemi — Esercitazione 3

Soluzione

25 Ottobre 2002

Esercizio 1. *E' dato un sistema descritto dal modello ingresso-uscita*

$$4\ddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 3y(t) = \ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) + 4u(t)$$

1. *Determinare una realizzazione di tale sistema in termini di variabili di stato e darne una rappresentazione grafica mediante un diagramma a blocchi. Precisare se in base a tale scelta di variabili lo spazio di stato coincide con lo spazio di fase.*

   Una possibile rappresentazione in variabili di stato per questo sistema con $n = m = 2$ assume la forma

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_2} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} b_0 - \frac{a_0 b_2}{a_2} & b_1 - \frac{a_1 b_2}{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \frac{b_2}{a_2} u(t) \end{cases}$$

   ovvero, passando ai valori numerici,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{7}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \frac{13}{4} & \frac{9}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{4} u(t) \end{cases} \tag{1}$$

   Il diagramma a blocchi è mostrato in figura 1.

   Lo spazio di stato di questa rappresentazione non coincide con lo spazio di fase, ovvero le variabili di stato non coincidono con l'uscita e le sue derivate (tale scelta si può fare solo se $m = 0$).

2. *Calcolare gli autovalori della matrice A e verificare che essi corrispondono alle radici del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata all'equazione differenziale.*

   Il polinomio caratteristico della matrice A vale

$$P(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{3}{4} & \lambda + \frac{7}{4} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{7}{4}\lambda + \frac{3}{4}$$

   Tale polinomio coincide (a meno di una costante) con il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata all'equazione differenziale $P'(s) = 4s^2 + 7s + 3$ e dunque i due polinomi hanno le stesse radici. La matrice ha dunque due autovalori distinti $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -\frac{3}{4}$.

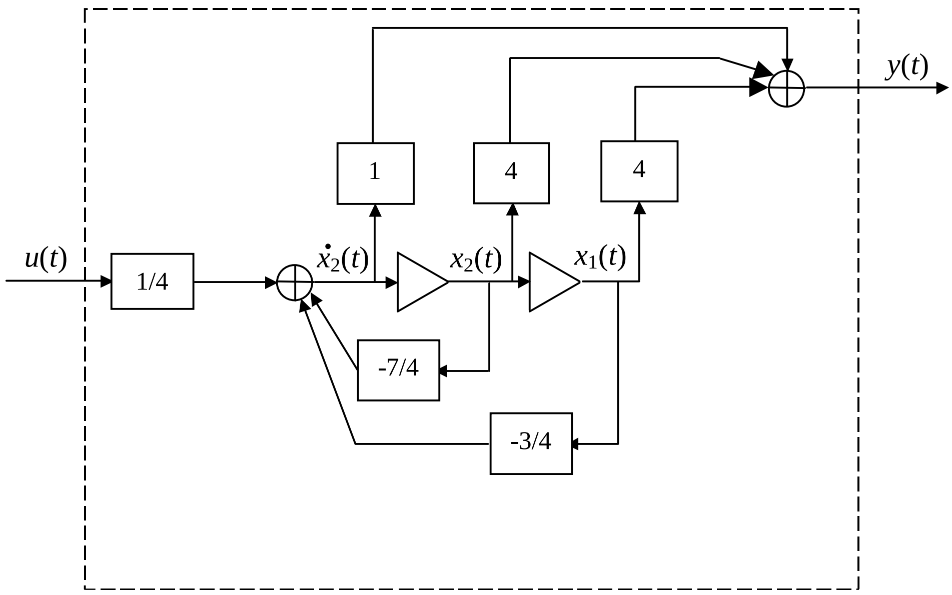

Figura 1: Diagramma a blocchi della rappresentazione.

3. *Usare lo sviluppo di Sylvester per calcolare la matrice di transizione dello stato per questa rappresentazione.*

   Per determinare e^{At} scriviamo il sistema

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} &= \alpha_0(t) + \lambda_1\alpha_1(t) \\ e^{\lambda_2 t} &= \alpha_0(t) + \lambda_2\alpha_1(t) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} e^{-t} &= \alpha_0(t) - \alpha_1(t) \\ e^{-\frac{3}{4}t} &= \alpha_0(t) - \frac{3}{4}\alpha_1(t) \end{cases}$$

   da cui si ricava

$$\begin{cases} \alpha_0(t) &= -3e^{-t} + 4e^{-\frac{3}{4}t} \\ \alpha_1(t) &= -4e^{-t} + 4e^{-\frac{3}{4}t} \end{cases}$$

   Dunque

$$e^{At} = \alpha_0(t)I_2 + \alpha_1(t)A = \begin{bmatrix} (-3e^{-t} + 4e^{-\frac{3}{4}t}) & (-4e^{-t} + 4e^{-\frac{3}{4}t} \\ (3e^{-t} - 3e^{-\frac{3}{4}t}) & (4e^{-t} - 3e^{-\frac{3}{4}t}) \end{bmatrix}$$

4. *Usare la formula di Lagrange per calcolare l'evoluzione libera dello stato e dell'uscita a partire da condizioni iniziali dello stato per cui valga* $y(0) = 2$ *e* $\dot{y}(0) = 1$.

   Per calcolare lo stato $\vec{x}(0) = \vec{x}_0 = [x_{0,1}\ x_{0,2}]^T$ che corrisponde alle condizioni date per l'uscita e la sua derivata, dobbiamo usare la trasformazione di uscita. Vale

$$y(t) = C\vec{x}(t) + Du(t)$$

   mentre derivando e usando l'equazione di stato si ricava anche

$$\dot{y}(t) = C\dot{\vec{x}}(t) + D\dot{u}(t) = C\left(Ax(t) + Bu(t)\right) + D\dot{u}(t) = CAx(t) + CBu(t) + D\dot{u}(t),$$

   ovvero

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \vec{x}(t) + \begin{bmatrix} D \\ CB \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix} \dot{u}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

Per il calcolo dell'evoluzione libera, si assume $u(t) = 0$ e $\dot{u}(t) = 0$. Dunque in $t = 0$ vale:

$$\left[\begin{array}{c} C \\ CA \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{array}\right] \qquad \Longrightarrow \qquad \left[\begin{array}{cc} \frac{13}{4} & \frac{9}{4} \\ -\frac{27}{16} & -\frac{11}{16} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right]$$

da cui si ricava

$$\vec{x}(0) = \left[\begin{array}{c} -2.32 \\ 4.24 \end{array}\right].$$

Infine l'evoluzione libera dello stato vale

$$\vec{x}_\ell(t) = e^{At}\vec{x}(0) = \left[\begin{array}{c} (-10e^{-t} + 7.68e^{-\frac{3}{4}t}) \\ (10e^{-t} - 5.76e^{-\frac{3}{4}t}) \end{array}\right]$$

e l'evoluzione libera dell'uscita vale per $t \geq 0$

$$y_\ell(t) = C\vec{x}(t) = Ce^{At}\vec{x}(0) = -10e^{-t} + 12e^{-\frac{3}{4}t}.$$

5. *Calcolare, in funzione delle matrici $\{A, B, C, D\}$ della rappresentazione precedentemente ottenuta, la risposta impulsiva $w(t)$.*

   La risposta impulsiva vale

$$w(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) = (-e^{-t} + 1.56e^{-\frac{3}{4}t})\,\delta_{-1}(t) + \frac{1}{4}\delta(t).$$

6. *Si discuta se esiste una trasformazione di similitudine che permette di passare ad una realizzazione in cui la matrice A' è diagonale. Se tale trasformazione esiste la si determini e si calcoli la corrispondente realizzazione.*

   Poiché la matrice A ha autovalori distinti, è sempre possibile passare, mediante una trasformazione di similitudine, ad una rappresentazione

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\vec{z}}(t) & = & A'\vec{z}(t) + B'u(t) \\ y(t) & = & C'\vec{z}(t) + D'u(t) \end{array}\right. \tag{2}$$

   dove la matrice A' è in forma diagonale. La trasformazione cercata usa la matrice modale V, costituita dagli autovettori di A e in questo caso particolare, in cui A è in forma compagna, la matrice modale prende la forma della matrice di Vandermonde ossia:

$$V = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{3}{4} \end{array}\right], \quad \text{e vale anche} \quad V^{-1} = \left[\begin{array}{cc} -3 & -4 \\ 4 & 4 \end{array}\right].$$

   La nuova rappresentazione vale

$$\begin{array}{ll} A' & = V^{-1}AV = \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{array}\right], \\ B' & = V^{-1}B = \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array}\right], \\ C' & = CV = \left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{25}{16} \end{array}\right] \\ D' & = D = \frac{1}{4}. \end{array}$$

7. *Calcolare la matrice di transizione dello stato sfruttando la trasformazione di similitudine e verificare il risultato ottenuto al punto 3.*

   La matrice di transizione dello stato per la rappresentazione diagonale vale

$$e^{A't} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{3}{4}t} \end{bmatrix}$$

   E' facile verificare che vale anche $e^{At} = Ve^{At}V^{-1}$.

8. *Usare la formula di Lagrange per calcolare, a partire dalla rappresentazione diagonale, l'evoluzione forzata dello stato e dell'uscita in conseguenza dell'applicazione dell'ingresso in figura. Si discuta se l'evoluzione forzata dello stato e dell'uscita per la rappresentazione originaria in forma compagna saranno identiche a queste oppure no.*

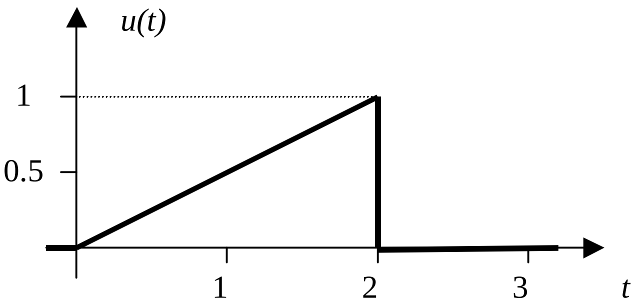

Figura 2: Ingresso applicato.

   L'evoluzione forzata dello stato per la rappresentazione (2) vale in base alla formula di Lagrange,

$$\vec{z}_f(t) = \int_0^t e^{A'(t-\tau)} B' u(\tau) d\tau$$

   ed particolarizzando per la $u(t)$ data (che e' sempre nulla tranne che nell'intervallo $[0, 2)$ dove vale $u(t) = t/2$) vale anche

$$\vec{z}_f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ \frac{1}{2} e^{A't} \int_0^t e^{-A'\tau} B' \tau d\tau & \text{se } t \in [0, 2); \\ \frac{1}{2} e^{A't} \int_0^2 e^{-A'\tau} B' \tau d\tau & \text{se } t \geq 2; \end{cases}$$

   Dunque ricordando anche la formula

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{a\tau} \tau d\tau = \left[(\tau - \frac{1}{a}) \frac{e^{a\tau}}{a} \right]_{\tau=\tau_1}^{\tau=\tau_2}$$

   possiamo anche scrivere

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{A't} \int_0^t e^{-A'\tau} B' \tau d\tau &= \frac{1}{2} e^{A't} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{\tau} & 0 \\ 0 & e^{\frac{3}{4}\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tau \\ \tau \end{bmatrix} d\tau = \frac{1}{2} e^{A't} \int_0^t \begin{bmatrix} -e^{\tau}\tau \\ e^{\frac{3}{4}\tau}\tau \end{bmatrix} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{3}{4}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(\tau - 1)e^{\tau} \\ (\tau - \frac{4}{3}) \frac{4}{3} e^{\frac{3}{4}\tau} \end{bmatrix}_{\tau=0}^{\tau=t} \end{aligned}$$

e con pochi tediosi passaggi si ottiene finalmente

$$\vec{z}_f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}(e^{-t} - 1) \\ \frac{2}{3}t + \frac{8}{9}(e^{-\frac{3}{4}t} - 1) \end{bmatrix} & \text{se } t \in [0, 2); \\ \begin{bmatrix} -4.19\ e^{-t} \\ 2.88\ e^{-\frac{3}{4}t} \end{bmatrix} & \text{se } t \geq 2; \end{cases}$$

Si noti che in tale espressione si possono riconoscere per $t \in [0, 2)$ i contributi dei modi del sistema (gli esponenziali decrescenti) e un termine forzante t che ha la stessa forma dell'ingresso. Per $t \geq 2$ cessa l'effetto dell'ingresso e, poiché l'evoluzione ritorna libera, resta solo una combinazione lineare dei modi del sistema.

Finalmente possiamo scrivere che

$$y_f(t) = C'\vec{z}_f(t) + D'u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ \frac{16}{24}t - \frac{1}{18}(16 + 9e^{-t} - 25e^{-\frac{3}{4}t}) & \\ & \text{se } t \in [0, 2); \\ -4.19\ e^{-t} + 4.5\ e^{-\frac{3}{4}t} & \text{se } t \geq 2; \end{cases}$$

Si osservi che non essendo il sistema strettamente proprio la discontinuità dell'ingresso in $t = 2$ provoca anche una discontinuità dell'uscita in $t = 2$ come mostrato in figura 3.

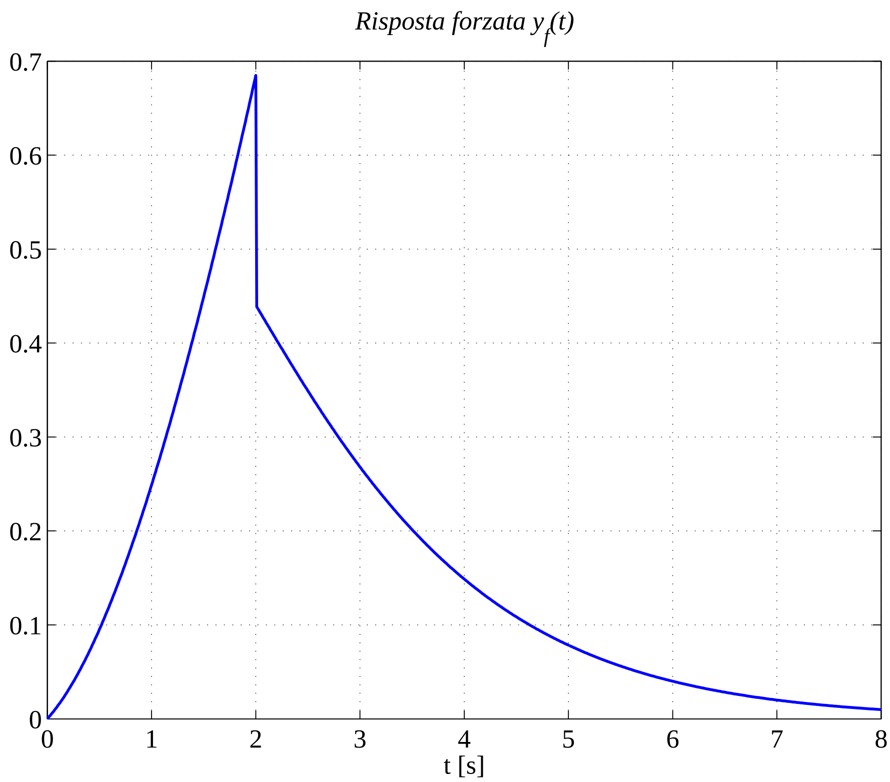

Figura 3: Risposta forzata che consegue all'applicazione dell'ingresso in Figura 2.

L'evoluzione forzata dello stato $\vec{z}_f(t)$ del sistema (2) che abbiamo calcolato non coincide con l'evoluzione dello stato $\vec{x}_f(t)$ del sistema (1) in corrispondenza allo stesso ingresso. Infatti, vale $\vec{x}_f(t) = V\vec{z}_f(t)$.

Viceversa l'evoluzione forzata dell'uscita $y_f(t)$ è la stessa per entrambe le rappresentazioni: esse descrivono infatti lo stesso modello ingresso-uscita. Si noti il vantaggio di passare alla forma diagonale per calcolare l'evoluzione forzata: se avessimo calcolato $y_f(t)$ usando la rappresentazione (1) la mole di calcoli sarebbe stata ben maggiore.