Analisi dei Sistemi — Esercitazione 2

Soluzione

17 Ottobre 2002

Esercizio 1. *Si consideri il sistema SISO lineare e stazionario descritto dal seguente modello ingresso-uscita*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 5u(t) \tag{1}$$

1. *Si determini il polinomio caratteristico e le sue radici.*

   Il polinomio caratteristico vale: $P(s) = s^2 + 4s + 5$.

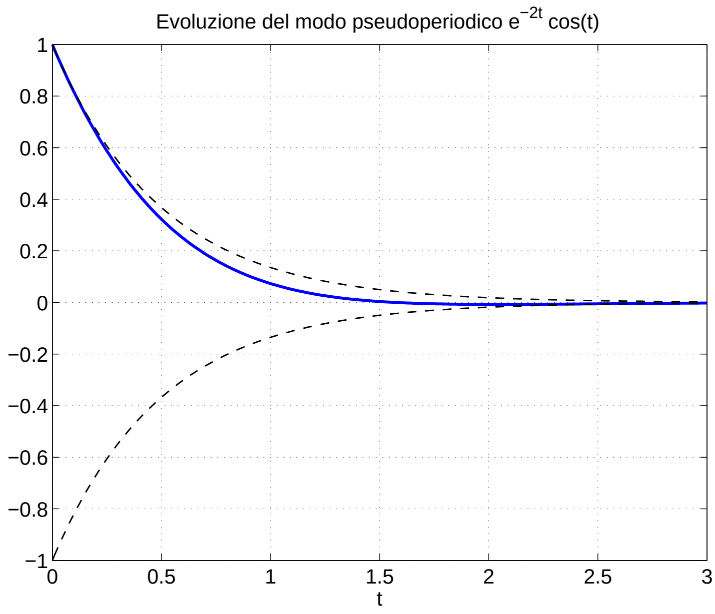
   Le sue radici sono $p, p' = \alpha \pm j\omega = -2 \pm j$.

2. *Si classifichino i modi del sistema, calcolandone i parametri caratteristici. Tracciare il loro andamento qualitativo.*

   Alla coppia di radici complesse e coniugate date corrisponde il modo pseudo-periodico

   $$e^{\alpha t}\cos(\omega t) = e^{-2t}\cos(t)$$

   che ha costante di tempo $\tau = -\frac{1}{\alpha} = 0.5$, pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{\alpha + \omega} = \sqrt{5}$ e coefficiente di smorzamento $\zeta = -\frac{\alpha}{\omega_n} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.89$. Poiché ζ è molto vicino a uno, il modo è molto smorzato e il suo andamento è mostrato in figura.



3. *Si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali*

$$y(t)|_{t=0} = 3, \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 1.$$

L'evoluzione libera ha la forma

$$y_\ell(t) = 2Me^{-2t}\cos(t+\varphi)$$

e dunque la sua derivata vale

$$\frac{dy_\ell(t)}{dt} = -4Me^{-2t}\cos(t+\varphi) - 2Me^{-2t}\sin(t+\varphi).$$

I coefficienti incogniti M e φ si ricavano dalle condizioni iniziali.

$$\begin{array}{rcccl} y_\ell(t)|_{t=0} & = & 2M\cos\varphi & = & 3, \\ \left.\dfrac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0} & = & -4M\cos\varphi - 2M\sin\varphi & = & 1, \end{array}$$

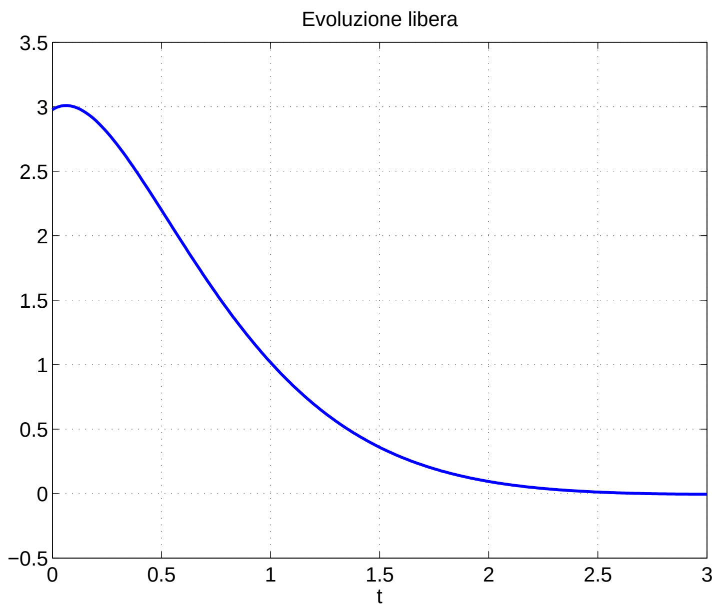
e detto $u = M\cos\varphi$ e $v = M\sin\varphi$ vale $u = 1.5$ e $v = -3.5$, da cui si ricava anche

$$M = \sqrt{u^2+v^2} = \sqrt{14.5} = 3.81; \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{-3.5}{1.5}\right) = -1.17 \text{ rad}.$$

Dunque l'evoluzione libera vale per $t \geq 0$

$$y_\ell(t) = 7.62\, e^{-2t}\cos(t - 1.17)$$

e il suo andamento è mostrato in figura. Essendo il modo pseudo-periodico stabile e poiché la costante di tempo vale $\tau = 0.5$, l'evoluzione libera si può considerare estinta dopo un tempo pari a $5\tau = 2.5$ s. Il comportamento oscillatorio è molto smorzato essendo $\zeta \simeq 1$.



4. *Si determini la risposta impulsiva del sistema e se ne discuta la struttura.*

   Per il modello dato l'ordine massimo di derivazione dell'uscita vale $n = 2$, mentre quello dell'ingresso vale $m = 1$. Poiché vale $n > m$, il sistema è strettamente proprio e dunque la risposta impulsiva $w(t)$ non contiene un termine impulsivo ma sarà una combinazione lineare dei modi. Dunque:

$$w(t) = 2\hat{M}e^{-2t}\cos(t + \hat{\varphi})\,\delta_{-1}(t)$$

   Le derivate di tale funzione, tenendo conto della discontinuità nell'origine, valgono

$$\frac{dw(t)}{dt} = \left(-4\hat{M}e^{-2t}\cos(t + \hat{\varphi}) - 2\hat{M}e^{-2t}\sin(t + \hat{\varphi})\right)\,\delta_{-1}(t) + 2\hat{M}\cos\hat{\varphi}\,\delta(t),$$

$$\frac{d^2w(t)}{dt^2} = \hat{f}(t)\,\delta_{-1}(t) + \left(-4\hat{M}\cos\hat{\varphi} - 2\hat{M}\sin\hat{\varphi}\right)\,\delta(t) + 2\hat{M}\cos\hat{\varphi}\,\delta_1(t),$$

   dove nella derivata seconda abbiamo denotato $\hat{f}(t)$ il coefficiente che moltiplica $\delta_{-1}(t)$ senza calcolarlo esplicitamente perché non necessario.

   Sostituendo la $w(t)$ e le sue derivate nel primo membro della eq. (1), sostituendo $u(t) = \delta(t)$ e $\frac{du(t)}{dt} = \delta_1(t)$ nel secondo membro della eq. (1) e infine eguagliando i coefficienti che al primo e secondo membro moltiplicano i termini $\delta(t)$ e $\delta_1(t)$ si ottiene il sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\hat{M}\cos\hat{\varphi} & = & 1 \\ 4\hat{M}\cos\hat{\varphi} - 2\hat{M}\sin\hat{\varphi} & = & 5 \end{array}\right.$$

   e detto $\hat{u} = \hat{M}\cos\hat{\varphi}$ e $\hat{v} = \hat{M}\sin\hat{\varphi}$ vale $\hat{u} = 0.5$ e $\hat{v} = -1.5$, da cui si ricava anche

$$\hat{M} = \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2} = \sqrt{2.5} = 1.58; \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{\hat{v}}{\hat{u}}\right) = \arctan\left(\frac{-1.5}{0.5}\right) = -1.25 \text{ rad.}$$

   Dunque la risposta impulsiva vale

$$w(t) = 3.16\,e^{-2t}\cos(t - 1.25)\,\delta_{-1}(t),$$

   e il suo andamento è mostrato in figura. Essendo il modo pseudo-periodico stabile e poiché la costante di tempo vale $\tau = 0.5$, la risposta impulsiva si può considerare estinta dopo un tempo pari a $5\tau = 2.5$ s. Il comportamento oscillatorio è molto smorzato essendo $\zeta \simeq 1$.

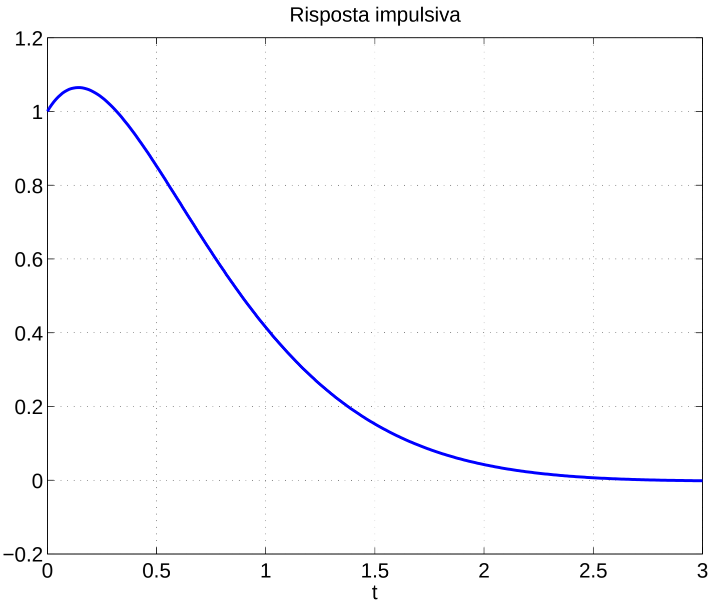
5. *Si determini, mediante l'integrale di Duhamel, la risposta forzata che consegue all'applicazione del segnale di ingresso $u(t)$ in figura.*

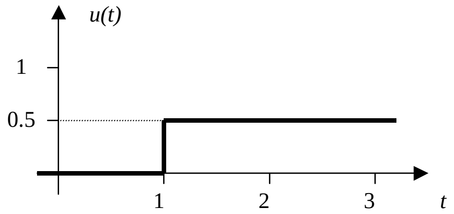
   Grazie all'integrale di Duhamel possiamo scrivere che la risposta forzata vale

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)w(t-\tau)d\tau = \left\{\begin{array}{ll} 0 & t \in (-\infty, 1) \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{1}^{t} w(t-\tau)d\tau & t \geq 1 \end{array}\right.$$

   Con il cambiamento di variabile $\rho = t - \tau$ vediamo che per $t \geq 1$ la risposta forzata vale

$$y_f(t) = \frac{1}{2}\int_{1}^{t} w(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_{0}^{t-1} w(\rho)d\rho = 1.58\int_{0}^{t-1} e^{-2\rho}\cos(\rho - 1.25)d\rho$$





Per il calcolo di tale integrale ricordiamo la formula notevole

$$\int e^{\alpha t}\cos(\omega t+\varphi)dt = e^{\alpha t}\ \frac{\cos(\omega t+\varphi-\psi)}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}},$$

dove $\psi = \arctan(\omega/\alpha)$. Nel caso particolare $\alpha=-2$, $\omega=1$, $\psi=\arctan(1/-2)=2.68$ rad (attenzione: ψ sta nel secondo quadrante) e dunque per $t\geq 1$

$$\begin{aligned} y_f(t) &= 1.58\int_0^{t-1} e^{-2\rho}\cos(\rho-1.25)d\rho = 1.58\left[e^{-2\rho}\ \frac{\cos(\rho-1.25-\psi)}{\sqrt{5}}\right]_0^{t-1} \\ &= 0.71\ \left(\ 0.71+e^{-2(t-1)}\ \cos(t-4.93)\right) \end{aligned}$$

Poiché la risposta forzata è nulla per $t<1$ vale infine (come anche mostrato in figura)

$$y_f(t) = \left(0.5+0.71\ e^{-2(t-1)}\ \cos(t-4.93)\right)\ \delta_{-1}(t-1).$$

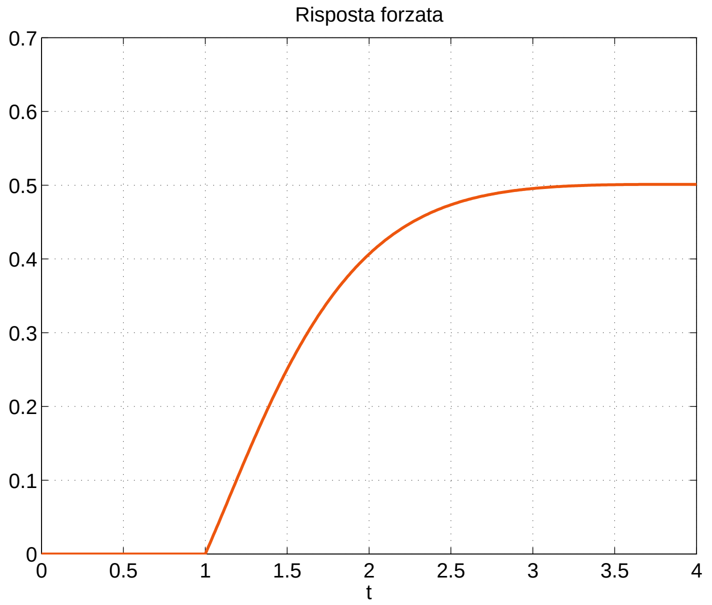
6. *Si determini la risposta indiciale del sistema e se ne discuta la struttura.*

Valutiamo il polinomio caratteristico in $s=0$: $P(s)\neq 0$ essendo il coefficiente del termine noto $a_0=5$ non nullo e dunque, detto $K=\frac{b_0}{a_0}=\frac{5}{5}=1$, la risposta indiciale ha espressione

$$w_{-1}(t) = \left(K+2\tilde{M}e^{-2t}\cos(t+\tilde{\varphi})\right)\ \delta_{-1}(t) = \left(1+2\tilde{M}e^{-2t}\cos(t+\tilde{\varphi})\right)\ \delta_{-1}(t).$$

Le derivate di tale funzione, tenendo conto della discontinuità nell'origine, valgono

$$\frac{dw_{-1}(t)}{dt} = \left(-4\tilde{M}e^{-2t}\cos(t+\tilde{\varphi})-2\tilde{M}e^{-2t}\sin(t+\tilde{\varphi})\right)\ \delta_{-1}(t)+\left(1+2\tilde{M}\cos\tilde{\varphi}\right)\ \delta(t),$$



$$\frac{d^2 w_{-1}(t)}{dt^2} = \tilde{f}(t)\,\delta_{-1}(t) + \left(-4\tilde{M}\cos\tilde{\varphi} - 2\tilde{M}\sin\tilde{\varphi}\right)\,\delta(t) + \left(1 + 2\tilde{M}\cos\tilde{\varphi}\right)\,\delta_1(t),$$

dove nella derivata seconda abbiamo denotato $\tilde{f}(t)$ il coefficiente che moltiplica $\delta_{-1}(t)$ senza calcolarlo esplicitamente perché non necessario.

Sostituendo la $w_{-1}(t)$ e le sue derivate nel primo membro della eq. (1), sostituendo $u(t) = \delta_{-1}(t)$ e $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$ nel secondo membro della eq. (1) e infine eguagliando i coefficienti che al primo e secondo membro moltiplicano i termini $\delta(t)$ e $\delta_1(t)$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2\tilde{M}\cos\tilde{\varphi} & = & -1 \\ 4\tilde{M}\cos\tilde{\varphi} - 2\tilde{M}\sin\tilde{\varphi} & = & -3 \end{cases}$$

e detto $\tilde{u} = \tilde{M}\cos\tilde{\varphi}$ e $\tilde{v} = \tilde{M}\sin\tilde{\varphi}$ vale $\tilde{u} = -0.5$ e $\tilde{v} = 0.5$, da cui si ricava anche

$$\tilde{M} = \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{u}}\right) = \arctan\left(\frac{0.5}{-0.5}\right) = \frac{3}{4}\pi = 2.36 \text{ rad.}$$

Dunque la risposta indiciale vale

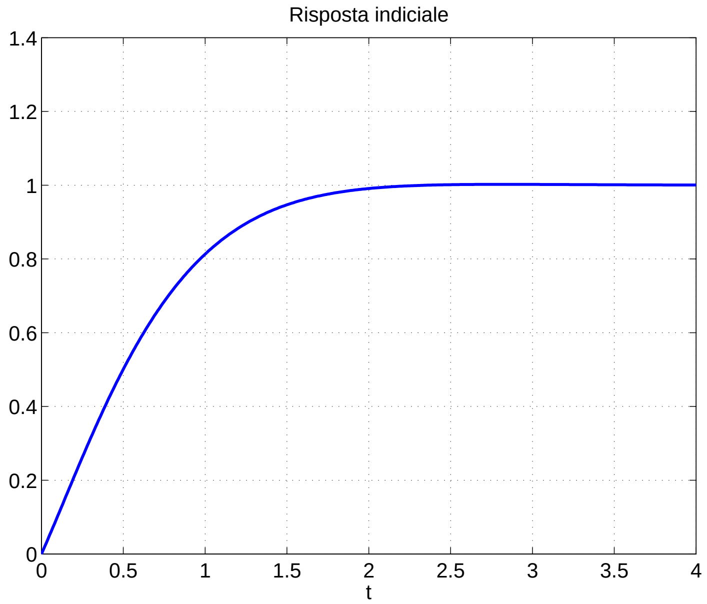
$$\left(1 + 1.41\, e^{-2t}\cos(t + 2.36)\right)\,\delta_{-1}(t),$$

e il suo andamento è mostrato in figura. Essendo il modo pseudo-periodico stabile e poiché la costante di tempo vale $\tau = 0.5$, la risposta indiciale raggiunge in pratica il valore di regime dopo un tempo pari a $5\tau = 2.5$ s. Il comportamento oscillatorio è molto smorzato essendo $\zeta \simeq 1$.

7. *Tenendo presente che l'ingresso $u(t)$ può essere scritto $u(t) = 0.5\,\delta_{-1}(t-1)$ si usi il risultato determinato al punto 6 per calcolare in modo alternativo la risposta forzata già determinata al punto 5. Verificare i risultati.*

Se ad un ingresso $\delta_{-1}(t)$ corrisponde la risposta forzata $w_{-1}(t)$, essendo il sistema lineare e stazionario possiamo affermare che ad un ingresso $0.5\,\delta_{-1}(t-1)$ corrisponde la risposta forzata

$$\begin{aligned} y_f(t) &= 0.5\, w_{-1}(t-1) = 0.5\,\left(1 + 1.41\, e^{-2(t-1)}\cos(t - 1 + 2.36)\right)\,\delta_{-1}(t-1) \\ &= \left(0.5 + 0.71\, e^{-2(t-1)}\cos(t + 1.36)\right)\,\delta_{-1}(t-1). \end{aligned}$$



Tale espressione coincide con quella determinata al punto 5 poiché $1.36 = -4.93 + 2\pi$ e dunque $\cos(t + 1.36) = \cos(t - 4.93)$.

8. *Si valuti il valore a cui tende la risposta forzata calcolata al punto 5 per t che tende all'infinito ed il valore a cui tende la risposta indiciale. Ci si aspetta che tali valori coincidano? Perché?*

   Il valore di regime delle due risposte è diverso: esso vale $K = \frac{b_0}{a_0} = 1$ per la risposta indiciale e $0.5K = 0.5$ per la risposta forzata che consegue all'ingresso $u(t) = 0.5\ \delta_{-1}(t-1)$. Il fatto che il segnale di ingresso $u(t)$ sia traslato di $T = 1$ s rispetto al gradino unitario non determina alcuna modifica nel valore di regime ma solo nel tempo necessario per raggiungere tale valore di regime. Infatti mentre la risposta indiciale raggiunge il valore di regime dopo un tempo $5\tau = 2.5$ s, la risposta forzata $y_f(t)$ raggiunge il valore di regime dopo un tempo $T + 5\tau = 3.5$ s.

   Per un più agevole confronto le due risposte sono tracciate sullo stesso grafico nella seguente figura.