Analisi dei Sistemi — Esercitazione 1

Soluzione

10 Ottobre 2002

Esercizio 1. *Sono dati i seguenti modelli matematici di sistemi dinamici.*

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 5\dot{u}(t)u(t). \tag{1}$$

$$t^2\ddot{y}(t) + t\dot{y}(t) + y(t) = 5sin(t)\ddot{u}(t) - 1. \tag{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -2 & t^2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} & + 3\,u(t). \end{array} \right. \tag{3}$$

$$y(t) = \dot{u}(t - T) \tag{4}$$

1. *Classificare tali modelli in modelli ingresso-uscita o modelli in variabili di stato, indicando il valore dei parametri significativi (ordine di derivazione dell'uscita, dell'ingresso, dimensione del vettore di stato, di ingresso e di uscita).*

2. *Individuare le proprietà strutturali che li caratterizzano: lineare o non lineare, stazionario o tempovariante, dinamico o istantaneo, a parametri concentrati o distribuiti, con o senza elementi di ritardi, proprio (strettamente o meno) o improprio. Motivare le risposte.*

- Modello (1): è un modello ingresso-uscita.
  - non lineare: l'equazione differenziale non è lineare a causa del termine $\dot{u}(t)u(t)$;
  - stazionario: i coefficienti della equazione differenziale sono tutti costanti;
  - dinamico: il legame ingresso-uscita non è una equazione algebrica;
  - a parametri concentrati: non vi sono derivate parziali;
  - senza elementi di ritardo: non vi sono argomenti in t e argomenti nel tempo nella forma $(t - T)$;
  - strettamente proprio: vale $n = 2$ e $m = 1$, quindi $n > m$.
- Modello (2): è un modello ingresso-uscita.

- non lineare: l'equazione differenziale non è lineare a causa del termine -1;
- non stazionario: i coefficienti della equazione differenziale non sono tutti costanti;
- dinamico: il legame ingresso-uscita non è una equazione algebrica;
- a parametri concentrati: non vi sono derivate parziali;
- senza elementi di ritardo: non vi sono argomenti in t e argomenti nel tempo nella forma $(t-T)$;
- proprio: vale $n = 2$ e $m = 2$, quindi $n = m$.

- Modello (3): è un modello in variabili di stato in cui lo stato ha $n = 2$ componenti. L'ingresso e l'uscita sono scalari (modello SISO).
  - lineare: la rappresentazione è nella forma standard

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}(t) &= A(t)\vec{x}(t) + B(t)\vec{u}(t) \\ \vec{y}(t) &= C(t)\vec{x}(t) + D(t)\vec{u}(t) \end{cases} \tag{5}$$

    costituita da n equazioni differenziali lineari del primo ordine e da una trasformazione lineare d'uscita
  - tempovariante: il coefficiente $a_{2,1}$ della matrice $A(t)$ è t^2 (funzione del tempo);
  - dinamico: il sistema di equazioni è di ordine $n = 2 > 0$;
  - a parametri concentrati: il vettore di stato ha un numero finito di componenti;
  - senza elementi di ritardo: non vi sono argomenti in t e argomenti traslati nel tempo della forma $(t-T)$;
  - proprio ma non strettamente: un modello nella forma (5) descrive sempre un sistema proprio ed in particolare strettamente proprio se e solo se la matrice D è nulla (in questo caso vale $D = 3$).

- Modello (4): è un modello ingresso-uscita.
  - lineare: il legame ingresso-uscita è una equazione differenziale lineare;
  - stazionario: i coefficienti della equazione differenziale sono tutti costanti;
  - dinamico: il legame ingresso-uscita non è una equazione algebrica;
  - a parametri concentrati: non vi sono derivate parziali;
  - con elementi di ritardo: l'uscita in t dipende dalla derivata dell'ingresso in $(t-T)$;
  - non proprio: vale $n = 0$ e $m = 1$, quindi $n < m$.

Esercizio 2. *Due serbatoi cilindrici di base S_1 e S_2 [m^2] sono collegati nella configurazione mostrata in Figura 1. L'altezza del liquido nei due serbatoi si denota, rispettivamente, $h_1(t)$ e $h_2(t)$ [m] mentre il volume di liquido in essi contenuto si denota $v_1(t)$ e $v_2(t)$ [m^3].*

Il primo serbatoio è alimentato da una portata variabile $q(t)$ [m^3/s] mentre da una valvola alla sua base fuoriesce una portata $q_1(t) = K_1 h_1(t)$ [m^3/s]. La portata in uscita dal primo serbatoio alimenta il secondo serbatoio, dal quale, a sua volta, fuoriesce una portata $q_2(t) = K_2 h_2(t)$ [m^3/s].

La legge di conservazione della massa per un fluido incomprimibile impone che la derivata del volume di liquido $v(t)$ contenuto in un serbatoio sia pari alla portata ad esso afferente, ovvero dette $q_{in}(t)$ e $q_{out}(t)$ la somma totale delle portate in ingresso e di quelle in uscita, vale

$$\dot{v}(t) = q_{in}(t) - q_{out}(t).$$

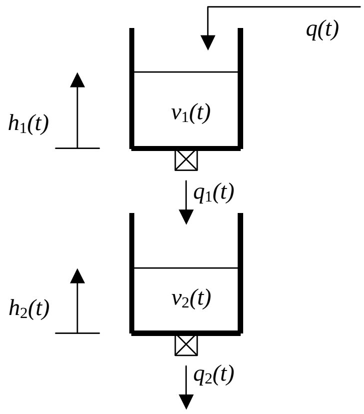

Figura 1: Due serbatoi in cascata.

1. *Determinare un modello matematico in termini di variabili di stato per questo sistema, scegliendo come variabili di stato $x_1(t) = v_1(t)$ e $x_2(t) = v_2(t)$ il volume di liquido nei due serbatoi, come ingresso $u(t) = q(t)$ la portata in ingresso al primo serbatoio, e come uscita $y(t) = h_2(t)$ l'altezza del secondo serbatoio. Indicare il valore delle matrici A, B, C, D che costituiscono la rappresentazione.*

   Applicando ai due serbatoi la legge di conservazione della massa per un fluido incomprimibile, si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{v}_1(t) &= q(t) - q_1(t) \\ \dot{v}_2(t) &= q_1(t) - q_2(t) \end{cases} \tag{6}$$

   Sostituendo nel sistema (6) le espressioni fornite per $q_1(t)$ e $q_2(t)$ si ottengono le equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{v}_1(t) = q(t) - K_1 h_1(t) = q(t) - \dfrac{K_1}{S_1} v_1(t) \\ \\ \dot{v}_2(t) = K_1 h_1(t) - K_2 h_2(t) = \dfrac{K_1}{S_1} v_1(t) - \dfrac{K_2}{S_2} v_2(t) \end{cases}$$

   mentre per la trasformazione d'uscita vale la seguente relazione:

$$h_2(t) = \frac{1}{S_2} v_2(t).$$

   Introducendo l'ingresso, l'uscita e le variabili di stato si ottiene il seguente modello VS:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{S_1} & 0 \\ \frac{K_1}{S_1} & -\frac{K_2}{S_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{S_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{7}$$

2. *Individuare le proprietà generali che caratterizzano la struttura di tale sistema.*

   Il sistema descritto dal modello VS 7 è:

   - lineare: l'equazione di stato e la trasformazione di uscita sono lineari;
   - stazionario: le matrici A, B, C, D non dipendono dal tempo;

- dinamico: il sistema di equazioni è di ordine $n = 2 > 0$;
- a parametri concentrati: il vettore di stato ha un numero finito di componenti;
- senza elementi di ritardo: non vi sono argomenti in t e argomenti traslati nel tempo della forma $(t - T)$;
- strettamente proprio: la matrice $D = 0$

3. *Determinare il modello matematico in termini di legame ingresso- uscita di tale sistema.*

   Dalla trasformazione d'uscita risulta:

$$x_2(t) = S_2 y(t)$$

mentre dalla seconda eq. di stato in (7) si ricava

$$x_1(t) = \frac{S_1}{K_1}\dot{x}_2(t) + \frac{S_1 K_2}{K_1 S_2}x_2(t) = \frac{S_1 S_2}{K_1}\dot{y}(t) + \frac{S_1 K_2}{K_1}y(t)$$

Derivando e sostituendo nella prima eq. di stato in (7) si ricava infine

$$\frac{S_1 S_2}{K_1}\ddot{y}(t) + \frac{S_1 K_2}{K_1}\dot{y}(t) = -S_2\dot{y}(t) - K_2 y(t) + u(t)$$

e riordinando si ottiene il legame IU cercato

$$\frac{S_1 S_2}{K_1}\ddot{y}(t) + \frac{S_1 K_2 + S_2 K_1}{K_1}\dot{y}(t) + K_2 y(t) = u(t),$$

ovvero una equazione differenziale lineare con $n = 2$, $m = 0$.

4. *Indicare come si modifica la rappresentazione in variabili di stato se si suppone che sia possibile alimentare dall'esterno anche il secondo serbatoio mediante una portata variabile $\tilde{q}(t)$. (Gli ingressi ora sono due: $u_1(t) = q(t)$ e $u_2(t) = \tilde{q}(t)$)*

   Se si suppone che sia possibile alimentare dall'esterno anche il secondo serbatoio mediante una portata variabile $\tilde{q}(t)$, l' equazione che rappresenta la variazione del volume al secondo serbatoio si modifica in questo modo:

$$\dot{v}_2(t) = \frac{K_1}{S_1}v_1(t) - \frac{K_2}{S_2}v_2(t) + \tilde{q}(t)$$

Il sistema in esame è pertanto descritto dal seguente legame VS:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{S_1} & 0 \\ \frac{K_1}{S_1} & -\frac{K_2}{S_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{S_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Esercizio 3. *Il forno rappresentato nella Figura 2.(a) scambia calore con l'ambiente esterno attraverso la parete di destra che, a differenza delle altre, non è adiabatica. Attraverso una resistenza è possibile fornire al forno una certa potenza $q(t)$ [J/s]. La temperatura dell'ambiente esterno è $T_a(t)$ [K] mentre la temperatura interna del forno, supposta uniforme, vale $T(t)$ [K].*

La capacità termica del forno vale C_T [J/K] e infine si suppone che il coefficiente di scambio termico attraverso la parete non adiabatica valga k [J/K s]. Vale dunque la seguente legge di conservazione dell'energia

$$C_T\dot{T}(t) = k\,(T_a(t) - T(t)) + q(t)$$

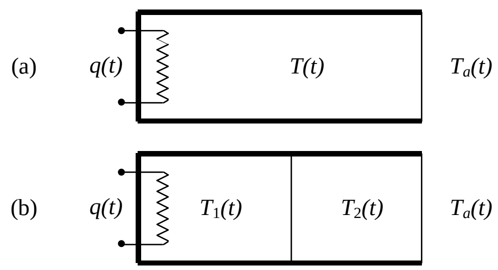

Figura 2: Un forno con una parete non adiabatica. (a) Schema di un modello del primo ordine (temperatura interna uniforme). (a) Schema di un modello del secondo ordine (temperatura interna non uniforme).

1. *Determinare un modello matematico in termini di variabili di stato per questo sistema, scegliendo come variabile di stato $x_1(t) = T(t)$ come ingressi $u_1(t) = q(t)$ e $u_2(t) = T_a(t)$, e come uscita $y(t) = T(t)$. Indicare il valore delle matrici A, B, C, D che costituiscono la rappresentazione.*

   Dalla legge di conservazione dell'energia, si ottiene l'equazione

   $$\dot{T}(t) = \frac{k}{C_T}(T_a(t) - T(t)) + \frac{1}{C_T}q(t)$$

   che introducendo le variabili d'ingresso, di stato e l'uscita diventa la seguente equazione di stato:

   $$\dot{x}(t) = -\frac{k}{C_T}x(t) + \frac{1}{C_T}u_1(t) + \frac{k}{C_T}u_2(t) \tag{8}$$

   Poiché l'uscita è la temperatura del forno, ossia coincide con lo stato, la trasformazione d'uscita è:

   $$y(t) = x(t)$$

   Pertanto il sistema è descritto dal seguente modello VS:

   $$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{k}{C_T}x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_T} & \frac{k}{C_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

2. *Individuare le proprietà generali che caratterizzano la struttura di tale sistema.*

   Il sistema descritto dal modello VS 7 è:

- lineare: l'equazione di stato e la trasformazione di uscita sono lineari;
- stazionario: le matrici A, B, C, D non dipendono dal tempo;
- dinamico: il sistema di equazioni è di ordine $n = 1 > 0$;
- a parametri concentrati: il vettore di stato ha un numero finito di componenti;
- senza elementi di ritardo: non vi sono argomenti in t e argomenti traslati nel tempo della forma $(t - T)$;
- strettamente proprio essendo $D = 0$.

3. *Indicare come si modifica la rappresentazione se si suppone di voler usare un modello più dettagliato che tenga conto del fatto che la temperatura all'interno del forno non è uniforme. Nel nuovo modello, come mostrato in Figura 2.(b), si considera il forno diviso in due aree della stessa dimensione, la prima di temperatura $T_1(t)$ e la seconda di temperatura $T_2(t)$. La capacità termica di ciascuna delle due aree vale $C_T/2$ mentre si suppone che il coefficiente di scambio termico fra le due aree valga $\tilde{k}$ [J/K s]. Si scelga come variabile di uscita la temperatura media fra le due aree.*

   La prima area del forno riceve la potenza fornita dalla resistenza e scambia calore con la seconda area in base all'equazione

$$\dot{T}_1(t) = \frac{2\tilde{k}}{C_T}(T_2(t) - T_1(t)) + \frac{2}{C_T}q(t)$$

   mentre la seconda area del forno scambia calore con la prima area e con l'ambiente esterno in base all'equazione

$$\dot{T}_2(t) = \frac{2\tilde{k}}{C_T}(T_1(t) - T_2(t)) + \frac{2k}{C_T}(T_a(t) - T_2(t))$$

   L'uscita è invece la temperatura media del forno, ossia

$$y(t) = \frac{T_1(t) + T_2(t)}{2}$$

   Riscrivendo in forma standard, date le scelte fatte per lo stato vale dunque

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2\tilde{k}}{C_T} & \frac{2\tilde{k}}{C_T} \\ \frac{2\tilde{k}}{C_T} & -\frac{2(k+\tilde{k})}{C_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{C_T} & 0 \\ 0 & \frac{2k}{C_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

4. *E' possibile costruire modelli sempre più dettagliati, in cui l'ordine del sistema, ovvero il numero di variabili di stato, aumenta indefinitamente. Portando tale costruzione al limite, che tipo di modello si ottiene?*

   Se il numero di variabili di stato tende all'infinito si ottiene un modello a parametri distribuiti in cui si associa ad ogni punto tra la parete di destra e di sinistra un particolare valore di temperatura.