Analisi dei Sistemi — Esercitazione 1

10 Ottobre 2002

Esercizio 1. Sono dati i seguenti modelli matematici di sistemi dinamici.

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 5\dot{u}(t)u(t). \tag{1}$$

$$t^2\ddot{y}(t) + t\dot{y}(t) + y(t) = 5sin(t)\ddot{u}(t) - 1. \tag{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -2 & t^2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 3\,u(t). \end{array} \right. \tag{3}$$

$$y(t) = \dot{u}(t - T) \tag{4}$$

1. Classificare tali modelli in modelli ingresso-uscita o modelli in variabili di stato, indicando il valore dei parametri significativi (ordine di derivazione dell'uscita, dell'ingresso, dimensione del vettore di stato, di ingresso e di uscita).
2. Individuare le proprietà strutturali che li caratterizzano: lineare o non lineare, stazionario o tempovariante, dinamico o istantaneo, a parametri concentrati o distribuiti, con o senza elementi di ritardi, proprio (strettamente o meno) o improprio. Motivare le risposte.

Esercizio 2. Due serbatoi cilindrici di base S_1 e S_2 [m^2] sono collegati nella configurazione mostrata in Figura 1. L'altezza del liquido nei due serbatoi si denota, rispettivamente, $h_1(t)$ e $h_2(t)$ [m] mentre il volume di liquido in essi contenuto si denota $v_1(t)$ e $v_2(t)$ [m^3].

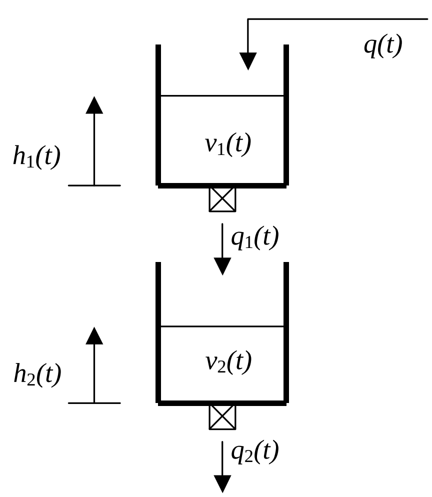

Figura 1: Due serbatoi in cascata.

Il primo serbatoio è alimentato da una portata variabile $q(t)$ [m^3/s] mentre da una valvola alla sua base fuoriesce una portata $q_1(t) = K_1 h_1(t)$ [m^3/s]. La portata in uscita dal primo serbatoio alimenta il secondo serbatoio, dal quale, a sua volta, fuoriesce una portata $q_2(t) = K_2 h_2(t)$ [m^3/s].

La legge di conservazione della massa per un fluido incomprimibile impone che la derivata del volume di liquido $v(t)$ contenuto in un serbatoio sia pari alla portata ad esso afferente, ovvero dette $q_{in}(t)$ e $q_{out}(t)$ la somma totale delle portate in ingresso e di quelle in uscita, vale

$$\dot{v}(t) = q_{in}(t) - q_{out}(t).$$

1. Determinare un modello matematico in termini di variabili di stato per questo sistema, scegliendo come variabili di stato $x_1(t) = v_1(t)$ e $x_2(t) = v_2(t)$ il volume di liquido nei due serbatoi, come ingresso $u(t) = q(t)$ la portata in ingresso al primo serbatoio, e come uscita $y(t) = h_2(t)$ l'altezza del secondo serbatoio. Indicare il valore delle matrici A, B, C, D che costituiscono la rappresentazione.
2. Individuare le proprietà generali che caratterizzano la struttura di tale sistema.
3. Determinare il modello matematico in termini di legame ingresso–uscita di tale sistema.
4. Indicare come si modifica la rappresentazione in variabili di stato se si suppone che sia possibile alimentare dall'esterno anche il secondo serbatoio mediante una portata variabile $\tilde{q}(t)$. (Gli ingressi ora sono due: $u_1(t) = q(t)$ e $u_2(t) = \tilde{q}(t)$.)

Esercizio 3. Il forno rappresentato nella Figura 2.(a) scambia calore con l'ambiente esterno attraverso la parete di destra che, a differenza delle altre, non è adiabatica. Attraverso una resistenza è possibile fornire al forno una certa potenza $q(t)$ [J/s]. La temperatura dell'ambiente esterno è $T_a(t)$ [K] mentre la temperatura interna del forno, supposta uniforme, vale $T(t)$ [K].

La capacità termica del forno vale C_T [J/K] e infine si suppone che il coefficiente di scambio termico attraverso la parete non adiabatica valga k [J/K s]. Vale dunque la seguente legge di conservazione dell'energia

$$C_T \dot{T}(t) = k\,(T_a(t) - T(t)) + q(t)$$

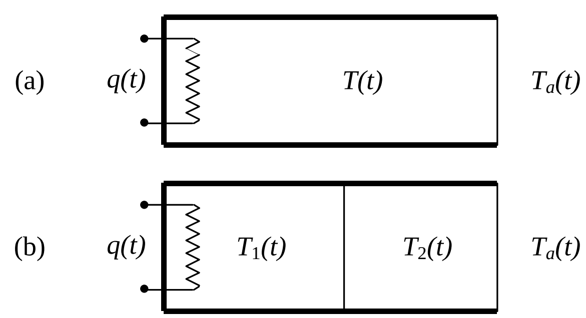

Figura 2: Un forno con una parete non adiabatica. (a) Schema di un modello del primo ordine (temperatura interna uniforme). (a) Schema di un modello del secondo ordine (temperatura interna non uniforme).

1. Determinare un modello matematico in termini di variabili di stato per questo sistema, scegliendo come variabile di stato $x_1(t) = T(t)$ come ingressi $u_1(t) = q(t)$ e $u_2(t) = T_a(t)$, e come uscita $y(t) = T(t)$. Indicare il valore delle matrici A, B, C, D che costituiscono la rappresentazione.
2. Individuare le proprietà generali che caratterizzano la struttura di tale sistema.
3. Indicare come si modifica la rappresentazione se si suppone di voler usare un modello più dettagliato che tenga conto del fatto che la temperatura all'interno del forno non è uniforme. Nel nuovo modello, come mostrato in Figura 2.(b), si considera il forno diviso in due aree della stessa dimensione, la prima di temperatura $T_1(t)$ e la seconda di temperatura $T_2(t)$. La capacità termica di ciascuna delle due aree vale $C_T/2$ mentre si suppone che il coefficiente di scambio termico fra le due aree valga $\tilde{k}$ [J/K s]. Si scelga come variabile di uscita la temperatura media fra le due aree.
4. E' possibile costruire modelli sempre più dettagliati, in cui l'ordine del sistema, ovvero il numero di variabili di stato, aumenta indefinitamente. Portando tale costruzione al limite, che tipo di modello si ottiene?