Analisi dei Sistemi

Soluzione del compito del 30 Settembre 2002

Esercizio 1. *Si valuti, mediante il criterio di Routh, la stabilità di un sistema il cui polinomio caratteristico vale*

$$P(s) = s^4 + 2s^3 - 7s^2 + 2s - 8,$$

indicando se possibile: a) numero delle radici a parte reale positiva; b) il numero e il valore delle radici a parte reale negativa; c) il valore delle eventuali radici immaginarie.

Costruiamo la tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 2 & \\ 2 & -8 & -8 & \\ 1 & 0 & & \\ 0 & & & \end{array}$$

Arrivati alla riga 1 (riga di ordina dispari) dobbiamo arrestarci perché l'intera riga si annulla. La tabella può completarsi derivando il polinomio $Q(s)$ nella variabile s^2 che ha per coefficienti gli elementi della riga 2, cioè $Q(s) = -8s^2 - 8$. Poiché $\frac{dQ(s)}{ds} = -16s$, possiamo sostituire la riga 1 con la riga $1'$ che contiene il singolo coefficiente -16.

Vale dunque:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 2 & \\ 2 & -8 & -8 & \\ 1' & -16 & & \\ 0 & -8 & & \end{array}$$

Possiamo allora scomporre $P(s) = R(s)Q(s)$.

- Il polinomio $R(s)$, di grado due, ha una radice a parte reale negativa e una a parte reale positiva, come si vede dalla permanenza di segno tra le righe $4 \to 3$ e dall'alternanza di segno fra le righe $3 \to 2$.
- Il polinomio $Q(s) = -8s^2 - 8$ ha due radici immaginarie $\pm j$.

Concludiamo che il sistema è instabile poiché il suo polinomio caratteristico contiene una radice a parte reale positiva.

Esercizio 2. *Si consideri un sistema descritto dal seguente modello ingresso-uscita*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = u(t)$$

1. *Si calcoli, utilizzando le trasformate di Laplace, l'evoluzione complessiva $y(t)$ dell'uscita di tale sistema a partire da condizioni iniziali $y(0) = 1$; $\dot{y}(0) = 0$ e sotto l'effetto di un segnale $u(t) = 3\delta_{-1}(t)$.*

2. *Si discuta la struttura della risposta complessiva determinata al punto precedente, discutendo i singoli termini che la compongono e giustificando, anche in termini di analisi modale, il valori a cui tende per $t \to \infty$ l'uscita complessiva. (Tale domanda vuole valutare la preparazione generale: evitare risposte stringate).*

1. Trasformando secondo Laplace vale: $(s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) + 4(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) = U(s)$ ovvero

$$Y(s) = \frac{U(s)}{s^2+4s+4} + \frac{y(0)s + (\dot{y}(0) + 4y(0))}{s^2+4s+4} = \underbrace{\frac{3}{s(s^2+4s+4)}}_{Y_f(s)} + \underbrace{\frac{s+4}{s^2+4s+4}}_{Y_\ell(s)}$$

Il polinomio $s^2+4s+4 = (s+2)^2$ ha una radice -2 di molteplicità doppia. Lo sviluppo di Heaviside del primo termine, che corrisponde all'evoluzione forzata, vale:

$$Y_f(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_{2,1}}{(s+2)^2} + \frac{R_{2,2}}{(s+2)}$$

dove

$$\begin{aligned} R_1 &= \lim_{s\to 0}\ sY_f(s) = \lim_{s\to 0}\ \frac{3}{s^2+4s+4} = \frac{3}{4} \\ R_{2,1} &= \lim_{s\to -2}\ (s+2)^2\ Y_f(s) = \lim_{s\to -2}\ \frac{3}{s} = -\frac{3}{2} \\ R_{2,2} &= \lim_{s\to -2}\ \frac{d}{ds}\ (s+2)^2\ Y_f(s) = \lim_{s\to -2}\ -\frac{3}{s^2} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

e dunque antitrasformando vale

$$y_f(t) = \left(R_1 + R_{2,1}\ te^{-2t} + R_{2,2}\ e^{-2t}\right)\ \delta_{-1}(t) = \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\ te^{-2t} - \frac{3}{4}\ e^{-2t}\right)\ \delta_{-1}(t)$$

Lo sviluppo di Heaviside del secondo termine, che corrisponde all'evoluzione libera, vale:

$$Y_\ell(s) = \frac{R'_{2,1}}{(s+2)^2} + \frac{R'_{2,2}}{(s+2)}$$

dove

$$\begin{aligned} R'_{2,1} &= \lim_{s\to -2}\ (s+2)^2\ Y_\ell(s) = \lim_{s\to -2}\ (s+4) = 2 \\ R'_{2,2} &= \lim_{s\to -2}\ \frac{d}{ds}\ (s+2)^2 Y_\ell(s) = 1 \end{aligned}$$

e dunque antitrasformando vale

$$y_\ell(t) = \left(R'_{2,1}\ te^{-2t} + R'_{2,2}\ e^{-2t}\right)\ \delta_{-1}(t) = \left(2\ te^{-2t} +\ e^{-2t}\right)\ \delta_{-1}(t)$$

Infine la risposta complessiva vale

$$y(t) = y_f(t) + y_\ell(t) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ te^{-2t} + \frac{1}{4}\ e^{-2t}\right)\ \delta_{-1}(t)$$

2. La risposta complessiva può essere scomposta in due termini.

Un termine transitorio

$$\left(\frac{1}{2}\ te^{-2t} + \frac{1}{4}\ e^{-2t}\right)\ \delta_{-1}(t)$$

che è composto da una combinazione dei modi del sistema. Tale termine tende a 0 per t che tende all'infinito, poiché tutti i poli sono a parte reale negativa, ovvero il sistema è stabile.

Un termine di regime

$$\frac{3}{4}\ \delta_{-1}(t)$$

che ha la stessa forma dell'ingresso (un gradino di ampiezza 3) moltiplicato per il guadagno $K = \frac{b_0}{a_0} = \frac{1}{4}$. Per t che tende all'infinito, la risposta complessiva tende appunto a tale valore.

Esercizio 3. *Tracciare il diagramma di Bode della funzione di trasferimento*

$$W(s) = \frac{40s - 10}{s^3 + 21s^2 + 20s}.$$

Passo alla forma di Bode. Si fattorizza il polinomio caratteristico al denominatore $P(s) = s^3 + 21s^2 + 20s = s\,(s+1)\,(s+20)$ e dunque

$$W(s) = \frac{(40s - 10)}{s\,(s+1)\,(s+20)} = \frac{-10\,(1-4s)}{20s\,(s+1)\,(1+\frac{1}{20}s)} = -\frac{1}{2}\frac{(1-4s)}{s\,(1+s)\,(1+\frac{1}{20}s)}.$$

Ponendo $s = j\omega$ vale

$$W(j\omega) = -\frac{1}{2}\frac{(1-4j\omega)}{j\omega\,(1+j\omega)\,(1+\frac{1}{20}j\omega)}.$$

Vale:

$$K = -0.5 \qquad \text{e} \qquad K_{db} = 20\log_{10}(|K|) = -6\;db.$$

Si noti che $K < 0$ e dunque la fase associata a tale termine è π e non zero (ovviamente sarebbe anche ugualmente lecito scegliere $-\pi$ come fase di tale termine).

Il termine binomio al numeratore, associato allo zero $z = 0.25$, ha punto di rottura $\omega = 0.25$ a partire dal quale il modulo cresce con pendenza 20 db/decade, mentre la fase decresce da 0 a $-\frac{\pi}{2}$ (essendo lo zero positivo).

Il diagramma del termine associato al polo nell'origine ha modulo sempre decrescente con pendenza -20 db/decade e il diagramma dei moduli vale $1 = 0$ db per $\omega = 1$. La fase vale sempre $-\frac{\pi}{2}$.

Il termine binomio al denominatore, associato al polo $z = -1$, ha punto di rottura $\omega = 1$ a partire dal quale il modulo decresce con pendenza -20 db/decade, mentre la fase decresce da 0 a $-\frac{\pi}{2}$ (essendo il polo positivo).

Il termine binomio al denominatore, associato al polo $z = -20$, ha punto di rottura $\omega = 20$ a partire dal quale il modulo decresce con pendenza -20 db/decade, mentre la fase decresce da 0 a $-\frac{\pi}{2}$ (essendo il polo positivo).

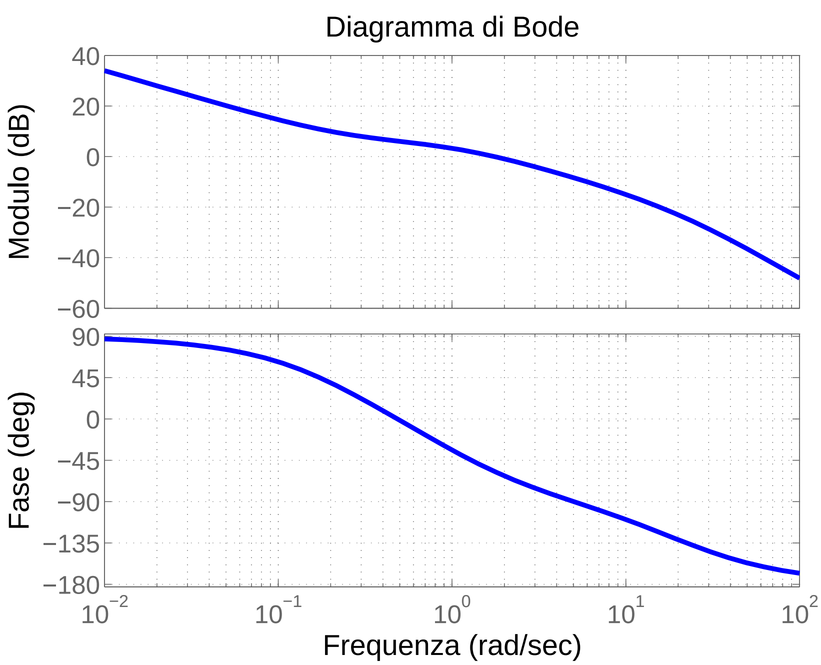

Figura 1: Diagramma completo di Bode.

Il diagramma completo dei moduli e delle fasi tracciato con MATLAB è mostrato in figura.

Esercizio 4. *È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u. \end{cases}$$

1. *Si dia la definizione delle proprietà di controllabilità e di osservabilità per un sistema lineare e stazionario.*
2. *Si determini se tale rappresentazione è controllabile e osservabile.*
3. *Si valuti la stabilità della rappresentazione secondo Lyapunov.*
4. *Determinata la funzione di trasferimento di tale sistema, se ne valuti la stabilità in senso BIBO.*
5. *Confrontare i risultati ottenuti ai due punti precedenti e interpretarne la concordanza o discordanza.*

1. Possiamo dire che una rappresentazione è
   - *controllabile* se a partire da uno stato iniziale $\vec{x}(0) \neq \vec{0}$ è possibile grazie ad un opportuno ingresso raggiungere lo stato $\vec{x}(t) = \vec{0}$ in un tempo finito t;
   - *osservabile* se osservando l'evoluzione libera dell'uscita per un intervallo finito $[0, t]$ è possibile risalire al valore dello stato iniziale $\vec{x}(0)$ in un tempo finito t.
2. La matrice di controllabilità del sistema vale

   $$C_c = \left[\begin{array}{c|c} B & AB \end{array} \right] = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

   e ha rango $r = 2$ pari all'ordine del sistema $n = 2$. Dunque la rappresentazione è controllabile.

   La matrice di osservabilità del sistema vale

   $$C_o = \left[\begin{array}{c} C \\ \hline CA \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

   e ha rango $r = 1$ inferiore all'ordine del sistema $n = 2$. Dunque la rappresentazione non è osservabile.
3. La matrice ha due autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$ e dunque due modi e^t e e^{-2t}. All'autovalore positivo è associato un modo divergente, e dunque il sistema è instabile secondo Lyapunov.
4. La funzione di trasferimento del sistema vale

   $$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{s+2} + 1 = \frac{s+3}{s+2}$$

   e dunque tale funzione ha zero $z = -3$, polo $p = -2$ e un unico modo e^{-2t}. Essendo tutti i poli a parte reale negativa il sistema è BIBO stabile.
5. Vi è una discrepanza fra i due criteri di stabilità. Infatti, la non controllabilità della rappresentazione determina il fatto che uno dei modi che la caratterizzano non compaia nella funzione di trasferimento. Tale modo è appunto quello instabile e^t, mentre resta nel legame ingresso-uscita solo il modo stabile e^{-2t}.