Analisi dei Sistemi

Soluzione del compito del 16 Settembre 2002

1. Il sistema descritto dal modello

$$\left\{\begin{array}{lcl}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 4\\ 2\end{bmatrix}u(t)\\ \\ y(t) & = & \begin{bmatrix}5 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix} + 7\ u(t)\end{array}\right.$$

   è:

   - lineare: la rappresentazione è nella forma standard

   $$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{\vec{x}}(t) & = & A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)\\ \vec{y}(t) & = & C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t)\end{array}\right. \tag{1}$$

     costituita da n equazioni differenziali lineari del primo ordine e da una trasformazione lineare d'uscita
   - stazionario: le matrici A, B, C, D sono costanti e non dipendono dal tempo;
   - dinamico: il sistema di equazioni è di ordine $n = 3 > 0$;
   - a parametri concentrati: non vi sono derivate parziali;
   - senza elementi di ritardo: non vi sono argomenti in t e argomenti traslati nel tempo della forma $(t - T)$;
   - proprio ma non strettamente: un modello della forma (1) descrive sempre un sistema proprio ed in particolare strettamente proprio se e solo se la matrice D è nulla (in questo caso invece $D = 7$).

2. La matrice A è diagonale. Dunque posso scrivere direttamente che la matrice di transizione dello stato per tale sistema vale

$$e^{At} = \begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{-2t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-3t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{bmatrix}.$$

   Lo stato vale per $t \geq 0$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_\ell(t) + \vec{x}_f(t)$$

   con i due termini dati dalla la formula di Lagrange

$$\vec{x}_\ell(t) = e^{At}\vec{x}(0) = \begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{-2t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-3t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3e^{-2t}\\ e^{-3t}\\ 2e^{-t}\end{bmatrix},$$

   mentre l'evoluzione forzata dello stato vale

$$\vec{x}_f(t) = \int_0^t e^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau.$$

Poiché $u(t) = 2$ per $t \in [0,4)$ mentre l'ingresso è nullo altrove posso scrivere:

$$\vec{x}_f(t) = \begin{cases} \int_0^t e^{A\tau} B 2 d\tau = \begin{bmatrix} -e^{-2\tau} \\ -\frac{8}{3}e^{-3\tau} \\ -4e^{-\tau} \end{bmatrix}_{\tau=0}^{\tau=t} = \begin{bmatrix} 1-e^{-2t} \\ \frac{8}{3}(1-e^{-3t}) \\ 4(1-e^{-t}) \end{bmatrix} & \text{se } t \in [0,4) \\ \int_{t-4}^t e^{A\tau} B 2 d\tau = \begin{bmatrix} -e^{-2\tau} \\ -\frac{8}{3}e^{-3\tau} \\ -4e^{-\tau} \end{bmatrix}_{\tau=t-4}^{\tau=t} = \begin{bmatrix} e^{-2(t-4)} - e^{-2t} \\ \frac{8}{3}(e^{-3(t-4)} - e^{-3t}) \\ 4(e^{-(t-4)} - e^{-t}) \end{bmatrix} & \text{se } t \geq 4 \end{cases}$$

L'uscita vale per $t \geq 0$:

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$$

con i due termini dati da

$$y_\ell(t) = C\vec{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3e^{-2t} \\ e^{-3t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix} = 15e^{-2t} + 4e^{-t},$$

e $y_f(t) = C\vec{x}_f(t) + Du(t) =$

$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-e^{-2t} \\ \frac{8}{3}(1-e^{-3t}) \\ 4(1-e^{-t}) \end{bmatrix} + 7 \cdot 2 = 27 - 5e^{-2t} - 8e^{-t} & \text{se } t \in [0,4] \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2(t-4)} - e^{-2t} \\ \frac{8}{3}(e^{-3(t-4)} - e^{-3t}) \\ 4(e^{-(t-4)} - e^{-t}) \end{bmatrix} = 5(e^{-2t} - e^{-2(t-4)}) + 8(e^{-(t-4)} - e^{-t}) & \text{se } t \geq 4 \end{cases}$$

3. Per $t \to \infty$ il vettore di stato e l'uscita tendono ad annullarsi. Infatti il sistema è stabile (gli autovalori della matrice A sono $-2, -3, -1$ tutti a parte reale negativa) e in assenza di ingresso ($u(t) = 0$ per $t \geq 4$) lo stato e l'uscita tendono asintoticamente a zero.

4. La funzione di trasferimento vale

$$W(s) = C(sI - A)^{-1} B + D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + 7 = \frac{5}{s+2} + \frac{4}{s+1} + 7 = \frac{7s^2 + 30s + 27}{s^2 + 3s + 2}$$

   Posso antitrasformare direttamente lo sviluppo di Heaviside dato nella penultima espressione ottenendo

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)] = \left(5e^{-2t} + 4e^{-t}\right) \delta_{-1}(t) + 7\delta(t)$$

   La presenza del termine impulsivo deriva dal fatto che il sistema non è strettamente proprio.

5. Poiché il sistema è stabile, esso ammette risposta armonica.

   Vale:

$$W(j\omega) = \frac{(27 - 7\omega^2) + 30j\omega}{(2 - \omega^2) + 3j\omega}$$

   e dunque

$$M_1 = |W(j)| = \frac{\sqrt{20^2 + 30^2}}{\sqrt{1 + 3^2}} = 11.4, \qquad M_2 = |W(j2)| = \frac{\sqrt{1 + 60^2}}{\sqrt{2^2 + 6^2}} = 9.49$$

mentre

$$\begin{aligned} \phi_1 = \angle W(j) &= \arctan(\tfrac{30}{20}) - \arctan(\tfrac{3}{1}) = 0.98 - 1.24 = -0.27 \text{ rad}, \\ \phi_2 = \angle W(j2) &= \arctan(\tfrac{60}{-1}) - \arctan(\tfrac{6}{-2}) = 1.59 - 1.89 = -0.30 \text{ rad}. \end{aligned}$$

Per linearità la risposta a regime vale:

$$y_r(t) = 2M_1 \sin(t + \phi_1) + M_2 \cos(2t + \phi_2) = 22.8 \sin(t - 0.27) + 9.49 \cos(2t - 0.30).$$

6. La rappresentazione in VS è di ordine $n = 3$, ovvero la matrice A ha tre autovalori $-2, -3, -1$ che corrispondono ai tre modi e^{-2t}, e^{-3t}, e^{-t}.

   Viceversa la funzione di trasferimento $W(s)$ ha solo due poli $-2, -1$ che corrispondono ai due modi e^{-2t}, e^{-t}.

   Ciò è indice del fatto che la rappresentazione VS è non controllabile o non osservabile. Due semplici criteri consentono di valutare se un sistema gode di queste proprietà.

   La matrice di controllabilità del sistema vale

$$C_c = \left[\begin{array}{c|c|c} B & AB & A^2B \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & -12 & 36 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

   e ha determinante -8 e dunque rango $r = 3$ pari all'ordine del sistema $n = 3$. Dunque la rappresentazione è controllabile.

   La matrice di osservabilità del sistema vale

$$C_o = \left[\begin{array}{c} C \\ \hline CA \\ \hline CA^2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -10 & 0 & -2 \\ 20 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   e ha rango $r = 2 < n = 3$. Dunque la rappresentazione non è osservabile.

7. Un modello ingresso-uscita corrispondente alla funzione di trasferimento $W(s) = \frac{7s^2+30s+27}{s^2+3s+2}$ è:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 7\frac{d^2}{dt^2}u(t) + 30\frac{d}{dt}u(t) + 27u(t).$$

   Una possibile rappresentazione in variabili di stato per questo sistema con $n = m = 2$ assume la forma

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_2} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} (b_0 - \frac{a_0 b_2}{a_2}) & (b_1 - \frac{a_1 b_2}{a_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \frac{b_2}{a_2} u(t) \end{cases}$$

   ovvero, passando ai valori numerici,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 13 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 7u(t) \end{cases}$$

   Tale rappresentazione è per costruzione controlalbile e osservabile come si dimostra calcolando le matrici di controllabilità e osservabilità che valgono

$$C_c = \left[\begin{array}{c|c} B & AB \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

   e

$$C_o = \left[\begin{array}{c} C \\ \hline CA \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 13 & 9 \\ -18 & -14 \end{bmatrix}$$

   che hanno rango pieno essendo entrambe non singolari.