Analisi dei Sistemi

Soluzione del compito del 17 Luglio 2002

Esercizio 1. Passando alla forma di Bode vale

$$W(j\omega) = 0.3 \frac{(1 + 2j\omega)}{j\omega(1 - j\omega)\,(1 + 5j\omega)}.$$

Tale funzione ha uno zero $z = -0.5$ e tre poli $p_1 = 0$, $p_2 = -0.2$ e $p_3 = 1$. Il guadagno $K = 0.3$ vale, espresso in decibel, $K_{db} = 20\log_{10}(K) = -10.5\ db$.

1. Il diagramma asintotico dei moduli e il diagramma delle fasi dei singoli termini è mostrato in figura 1. Si noti che il polo $p_3 = 1 > 0$ ha costante di tempo $\tau_3 = -\frac{1}{p_3} = -1 < 0$. Il punto di rottura del termine corrispondente a tale polo ha punto di rottura $\frac{1}{|\tau_3|}$. Il modulo di tale termine è decrescente per valori di ω crescenti (in maniera del tutto simile al termine corrispondente ad un polo reale negativo). La fase di tale termine è crescente per valori di ω crescenti (al contrario del termine corrispondente ad un polo reale negativo).

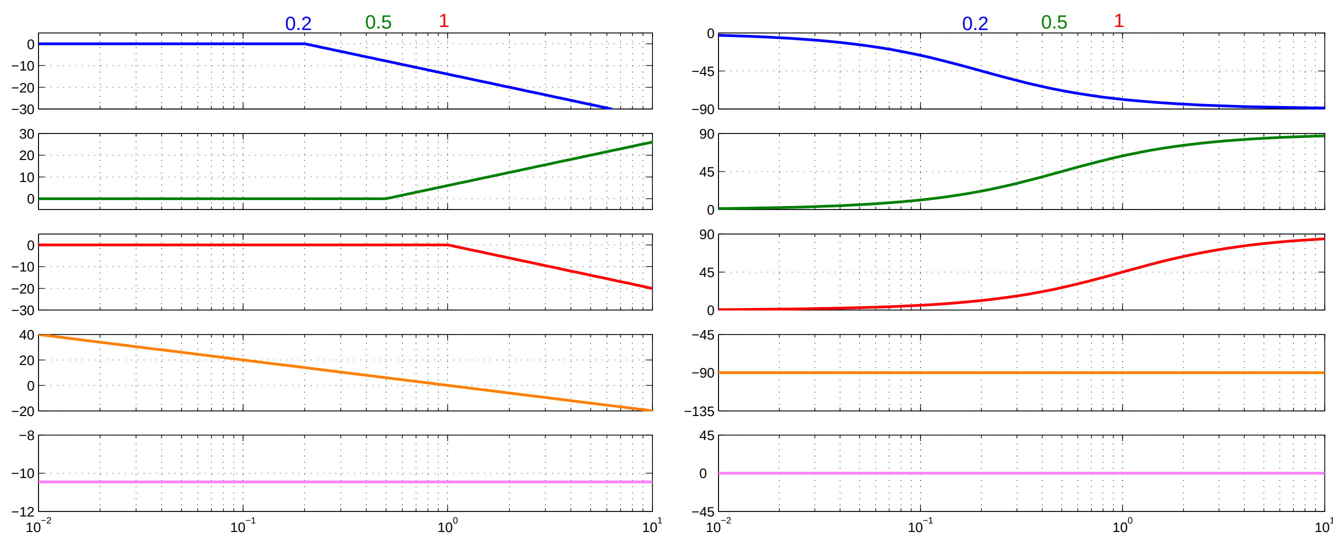

Figura 1: Diagramma di Bode dei singoli termini. A sinistra il diagramma dei moduli, a destra quello delle fasi. Dall'alto verso il basso: polo $p_2 = -0.2$, zero $z = -0.5$, polo $p_3 = 1$, polo $p_1 = 0$, guadagno K.

Il diagramma completo dei moduli e delle fasi tracciato con MATLAB è mostrato in figura 2.

2. Per tale funzione vale $K' = \frac{b_m}{a_n} = \frac{0.6}{-5} = -0.12$ e $K = 0.3$. Vi è un polo nell'origine e dunque $\nu = 1$. Infine vi sono in totale $n = 3$ poli e $m = 1$ zeri.

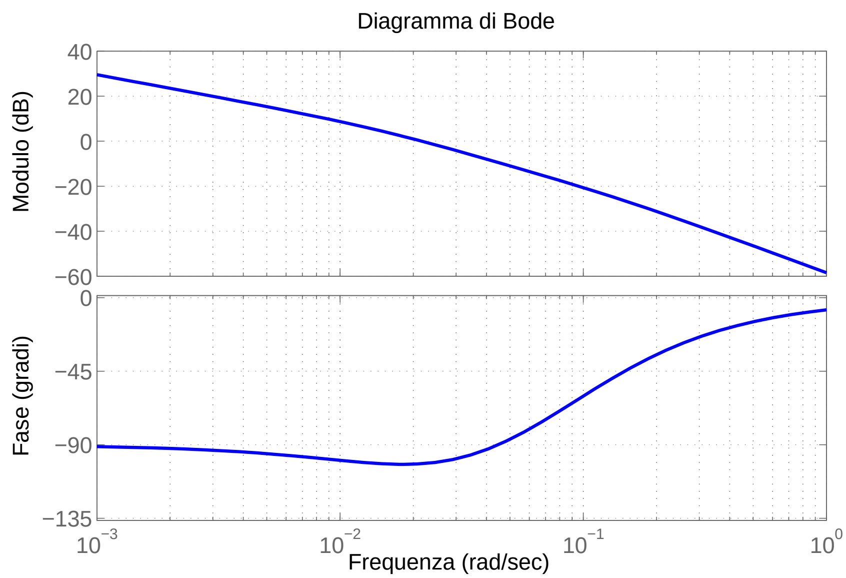

Figura 2: Diagramma completo di Bode.

Per tracciare il diagramma di Nyquist della funzione $W(j\omega)$ consideriamo il modulo M e la fase φ per i valori limite $\omega = 0$ e $\omega = +\infty$.

- Se $\omega = 0$ a causa del polo nell'origine vale:

$$\begin{aligned} &\text{modulo} \quad M = +\infty; \\ &\text{fase} \qquad \varphi = \angle K - \nu\tfrac{\pi}{2} = 0 - \tfrac{\pi}{2} = -\tfrac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

- Se $\omega = +\infty$ vale

$$\begin{aligned} &\text{modulo} \quad M = 0; \qquad (\text{poiché } n > m\ ) \\ &\text{fase} \qquad \varphi = \angle K' - (n-m)\tfrac{\pi}{2} = \pi - \pi = 0. \end{aligned}$$

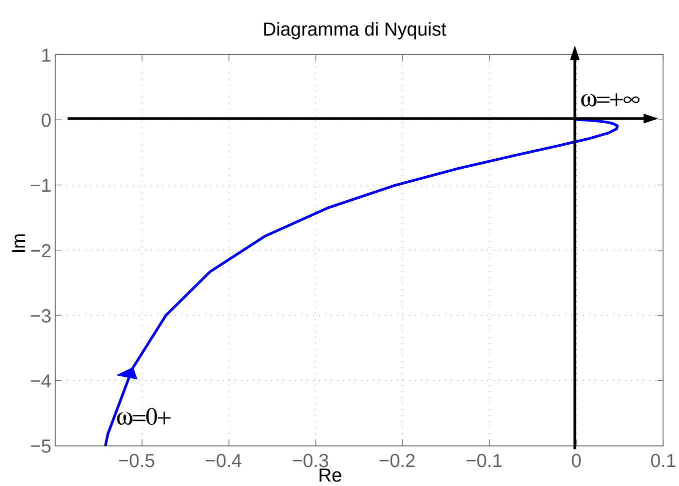

Figura 3: Diagramma di Nyquist.

Dal diagramma di Bode si osserva che il modulo è sempre decrescente. La fase partendo da $-\frac{\pi}{2}$ è prima decrescente sino a raggiungere circa -100^o e poi crescente tendendo asintoticamente a 0. Il diagramma di Nyquist tracciato con Matlab è mostrato in figura 3.

3. La $W(j\omega)$ non ha il significato fisico di risposta a regime perché il sistema non è stabile in senso BIBO: infatti ha un polo nell'origine e un polo a parte reale positiva.

Esercizio 2. Trasformando ottengo lo schema in figura 4, dove ho indicato con $R_1(s)$, $R_2(s)$ e $R(s)$ i valori dei segnali in punti opportuni del diagramma.

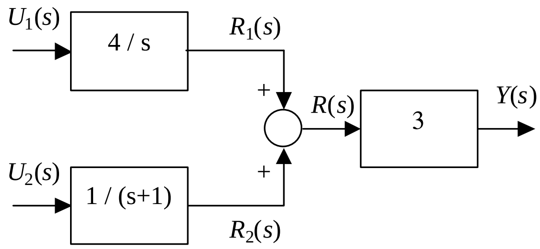

Figura 4:

1. Vale

$$\begin{aligned} Y(s) &= 3R(s) = 3[R_1(s) + R_2(s)] = 3[\tfrac{4}{s}U_1(s) + \tfrac{1}{s+1}U_2(s)] \\ &\tfrac{12}{s}U_1(s) + \tfrac{3}{s+1}U_2(s) = W_1(s)U_1(s) + W_2(s)U_2(s). \end{aligned}$$

2. L'ingresso $u_1(t)$ è la somma di due rampe lineari, una di pendenza 1 applicata in $t = 0$ e una di pendenza -1 applicata in $t = 1$ (la seconda rampa è traslata verso destra di $T = 1$). Dunque vale:

$$U_1(s) = \mathcal{L}[t\delta_{-1}(t) - (t-1)\delta_{-1}(t-1)] = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}.$$

L'ingresso $u_2(t)$ è il gradino unitario e vale

$$U_2(s) = \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s}.$$

Dunque abbiamo che

$$Y(s) = W_1(s)U_1(s) + W_2(s)U_2(s) = \frac{12}{s^3} - \frac{12e^{-s}}{s^3} + \frac{3}{s(s+1)} = \frac{12}{s^3} - \frac{12e^{-s}}{s^3} + \frac{3}{s} - \frac{3}{s+1},$$

dove ho posto

$$\frac{3}{s(s+1)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+1}$$

e ho calcolato i residui

$$R_1 = \lim_{s\to 0} \frac{3}{s+1} = 3, \qquad R_2 = \lim_{s\to -1} \frac{3}{s} = -3.$$

Infine antitrasformando ottengo

$$\begin{aligned} y(t) &= 6t^2\delta_{-1}(t) - 6(t-1)^2\delta_{-1}(t-1) + 3\delta_{-1}(t) - 3e^{-t}\delta_{-1}(t) \\ &= [6t^2 + 3 - 3e^{-t}]\delta_{-1}(t) - 6(t-1)^2\delta_{-1}(t-1). \end{aligned}$$

3. $W_1(s) = \frac{12}{s}$ non è BIBO stabile perché ha un polo nell'origine, mentre $W_2(s) = \frac{3}{s+1}$ è BIBO stabile perché il suo unico polo ($s = -1$) ha parte reale negativa.

Esercizio 3. Determino il polinomio caratteristico della matrice A:

$$P(s) = |sI - A| = s^2 + 6s + 8.$$

La matrice A ha dunque autovalori distinti $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -4$.

1. Per determinare e^{At} scriviamo il sistema

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} &= \alpha_0(t) + \lambda_1\alpha_1(t) \\ e^{\lambda_2 t} &= \alpha_0(t) + \lambda_2\alpha_1(t) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} e^{-2t} &= \alpha_0(t) - 2\alpha_1(t) \\ e^{-4t} &= \alpha_0(t) - 4\alpha_1(t) \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} \alpha_0(t) &= 2e^{-2t} - e^{-4t} \\ \alpha_1(t) &= 0.5e^{-2t} - 0.5e^{-4t} \end{cases}$$

Dunque

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-4t} & 0.5e^{-2t} - 0.5e^{-4t} \\ -4e^{-2t} + 4e^{-4t} & -e^{-2t} + 2e^{-4t} \end{bmatrix}$$

2. La trasformazione di similitudine che consente di passare ad una rappresentazione in cui A' è diagonale usa come matrice P la matrice modale, costituita dagli autovettori di A.

   Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -4$ (sono dunque distinti). L'autovettore $\vec{v}$ che corrisponde ad un generico autovalore λ soddisfa l'equazione $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, ossia si determina cercando una soluzione non nulla del sistema (sottodeterminato) di equazioni

$$(A - \lambda I)\,\vec{v} = \vec{0}.$$

   L'autovalore $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ associato a λ_1 si ricava dunque dal sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   che è soddisfatto da vettori della forma $\begin{bmatrix} x & -2x \end{bmatrix}^T$. Scelgo $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$.

L'autovalore $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ associato a λ_2 si ricava dal sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che è soddisfatto da vettori della forma $\begin{bmatrix} x & -4x \end{bmatrix}^T$. Scelgo $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix}^T$.

Vale quindi[1]

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

mentre la nuova rappresentazione vale

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \\ B' &= P^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \\ C' &= CP = \begin{bmatrix} -1 & -3, \end{bmatrix} \\ D' &= D = 6. \end{aligned}$$

3. Vale:

$$e^{At} = Pe^{A't}P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} P^{-1}$$

ed eseguendo i calcoli si ottiene nuovamente lo stesso risultato determinato al punto 1.

[1]N.B. La scelta $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_2 & \vec{v}_1 \end{bmatrix}$ è ugualmente ammissibile.