Analisi dei Sistemi

Soluzione del compito del 25 Giugno 2002

E' dato un sistema descritto dal modello ingresso-uscita

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 2\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 20\frac{d}{dt}y(t) + \rho y(t) = \frac{d}{dt}u(t) + 50u(t)$$

dove ρ è un parametro incognito ma costante.

1. *(4 punti) Individuare le proprietà generali che caratterizzano la struttura di tale sistema (lineare o non lineare, stazionario o tempovariante, dinamico o istantaneo, a parametri concentrati o distribuiti, con o senza elementi di ritardi, proprio o improprio) motivando le risposte e discutendo se tali proprietà dipendono dal valore del parametro ρ.*

   L'equazione differenziale è nella forma:

   $$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)}(t)$$

   e dunque il sistema descritto da tale modello è:

   (a) lineare: l'equazione differenziale è lineare;

   (b) stazionario: i coefficienti a_i e b_i non dipendono dal tempo;

   (c) dinamico: l'equazione differenziale è di ordine $n = 3 > 0$;

   (d) a parametri concentrati: non vi sono derivate parziali;

   (e) senza elementi di ritardo: non vi sono argomenti traslati nel tempo della forma $(t - T)$;

   (f) strettamente proprio: vale $n = 3$ e $m = 1$ e dunque $n > m$.

   Tali proprietà non dipendono dal valore del parametro costante ρ.

2. *(4 punti) Assunto $\rho = 0$, calcolare la funzione di trasferimento $W(s)$ e, antitrasformando, determinare la risposta impulsiva $w(t)$ di tale sistema.*

   Assunto $\rho = 0$, trasformando secondo Laplace si ottiene

   $$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+50}{s^3 + 2s^2 + 20s} = \frac{s+50}{s(s^2 + 2s + 20)}.$$

   Tale funzione di trasferimento ha $m = 1$ zeri e $n = 3$ poli. I poli valgono

   $$p_1 = 0; \quad p = \alpha + j\omega = -1 + j\sqrt{19} = -1 + j4.359; \quad \overline{p} = \alpha - j\omega = -1 - j\sqrt{19}.$$

Dunque la funzione può essere posta nella forma

$$W(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R}{s + 1 - j\sqrt{19}} + \frac{\overline{R}}{s + 1 + j\sqrt{19}}$$

e vale

$$\begin{aligned} R_1 &= \lim_{s\to 0} sW(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s+50}{s^2+2s+20} = 2.5, \\ R &= \lim_{s\to -1+j\sqrt{19}} (s+1-j\sqrt{19})W(s) = \lim_{s\to -1+j\sqrt{19}} \frac{s+50}{s(s+1+j\sqrt{19})} \\ &= -1.25 + j0.172 = u + jv. \end{aligned}$$

Dunque

$$M = \sqrt{u^2+v^2} = \sqrt{1.592} = 1.262,$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{v}{u}\right) = \arctan\left(\frac{0.172}{-1.25}\right) = 3 \text{ rad}$$

e antitrasformando si ottiene la risposta impulsiva

$$w(t) = \left(R_1 + 2Me^{\alpha t}\cos(\omega t + \phi)\right)\delta_{-1}(t) = \Big(2.5 + 2.524e^{-t}\cos(\sqrt{19}t + 3)\Big)\,\delta_{-1}(t).$$

3. *(4 punti) Determinare i parametri caratterizzanti dei vari modi (costante di tempo, pulsazione naturale, smorzamento) della $W(s)$ determinata al punto precedente, indicando se essi siano stabili o meno e tracciare qualitativamente il loro andamento in funzione del tempo.*

Ai poli del sistema: $p_1 = 0$, e $p - \overline{p} = \alpha \pm j\omega = -1 \pm j\sqrt{19}$, corrispondono i due modi:

- $e^{p_1 t} = 1$, un modo aperiodico costante con costante di tempo

$$\tau = -\frac{1}{p_1} = \infty.$$

  Tale modo è al limite di stabilità.

- $e^{\alpha t}\cos(\omega t) = e^{-t}\cos(\sqrt{19}t) = e^{-t}\cos(4.359t)$, un modo pseudo-periodico decrescente con pulsazione naturale

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2+\omega^2} = \sqrt{20} = 4.472$$

  e coefficiente di smorzamento

$$\zeta = -\frac{\alpha}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{19}} = 0.223.$$

  Graficamente, tali valori possono essere letti sul piano di Gauss come in figura 1. Tale modo è stabile.

L'andamento dei modi è tracciato in figura 2.

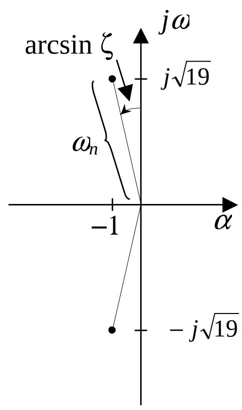

Figura 1: Rappresentazione della coppia di poli complessi e coniugati nel piano di Gauss.

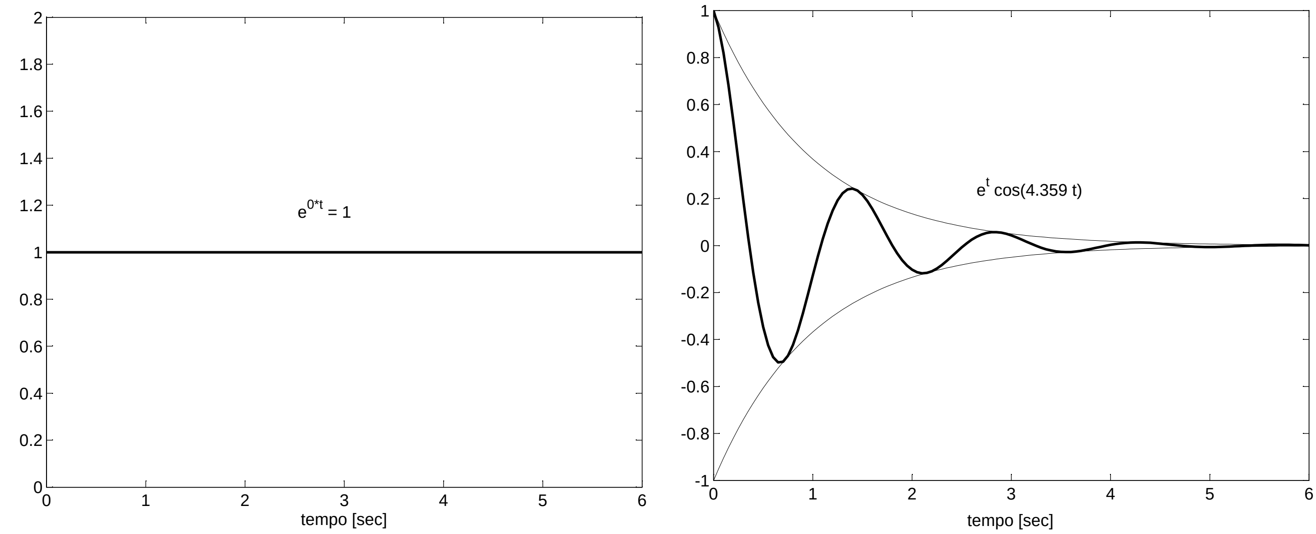

Figura 2: Andamento dei modi.

4. *(6 punti) Tracciare il diagramma di Bode della $W(j\omega)$ determinata al punto 2.*

   Passo alla forma di Bode

$$W(j\omega) = 2.5 \frac{(1 + \frac{j\omega}{50})}{j\omega(1 + \frac{j\omega}{10} + \frac{(j\omega)^2}{20})}.$$

   Vale:

$$K = 2.5 \qquad \text{e} \qquad K_{db} = 20\log_{10}(K) = 8\ db.$$

   Il diagramma completo dei moduli e delle fasi tracciato con MATLAB è mostrato in figura 3.

5. *(2 punti) [Se al punto precedente si è tracciato il diagramma di Bode, si suggerisce di rispondere alla seguente domanda dall'analisi del diagramma senza aver la necessità di fare calcoli esatti.] Qual è il valore di pulsazione ω_m per cui ad un segnale d'ingresso sinusoidale $u(t) = \sin(\omega_m t)$ consegue a regime un'uscita sinusoidale di ampiezza $\frac{1}{10}$?*

   Se il sistema fosse BIBO stabile (cioè se tutti i poli della sua funzione di trasferimento avessero parte reale negativa) il diagramma di Bode avrebbe il significato fisico di risposta armonica. In tal caso, una attenuazione di $\frac{1}{10}$ tra il segnale sinusoidale in ingresso $u(t)$ e il segnale sinusoidale in uscita a regime

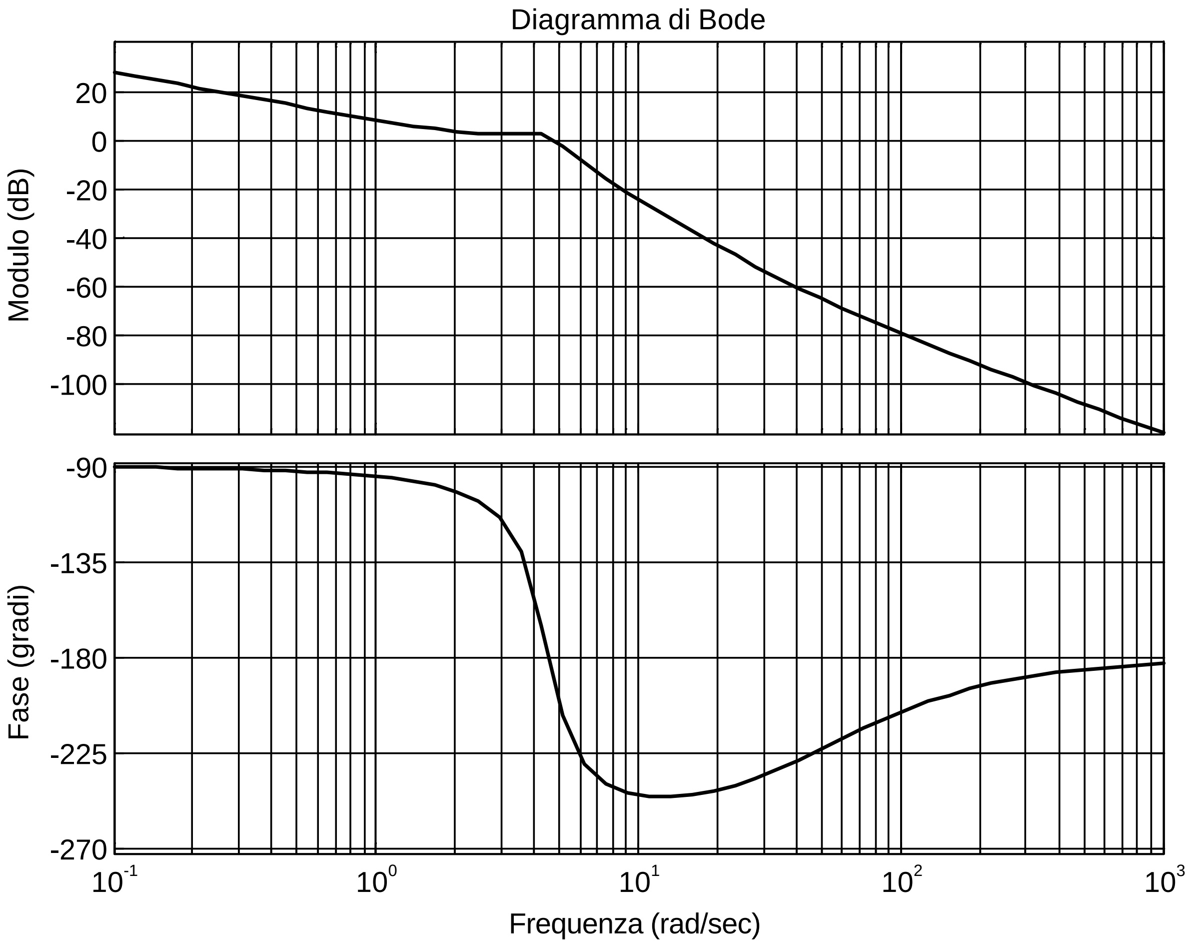

Figura 3: Diagramma completo di Bode.

$y_r(t)$, corrisponde in decibel a $20 \log_{10} 0.1 = -20db$ (in questo diagramma di Bode dei moduli si osserva che tale attenuazione si ha per $\omega = 9$ rad /sec).

Tuttavia, poiché la funzione di trasferimento ha un polo a parte reale nulla, il modo corrispondente non si estingue e la risposta a regime non sarà un segnale sinusoidale. Dunque il valore ω_n cercato non esiste.

6. *(4 punti) Sempre assunto $\rho = 0$, determinare una rappresentazione di tale sistema in termini di variabili di stato e darne una descrizione grafica mediante un diagramma a blocchi. Si precisi se la rappresentazione trovata usa come spazio di stato lo spazio di fase.*

   Una possibile rappresentazione in variabili di stato per questo sistema con $n = 3$ e $m = 1$ assume la forma

$$\left\{\begin{array}{ll}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix} & = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{a_0}{a_3} & -\frac{a_1}{a_3} & -\frac{a_2}{a_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{a_3}\end{bmatrix}u(t)\\ y(t) & = \begin{bmatrix}b_0 & b_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}\end{array}\right.$$

ovvero, essendo $n = 3$ con $a_3 = 1$, $a_2 = 2$, $a_1 = 20$, $a_0 = 0$, mentre vale $m = 1$ con $b_1 = 1$ e $b_0 = 50$,

$$\left\{\begin{array}{ll}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix} & = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -20 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t) & = \begin{bmatrix}50 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}\end{array}\right.$$

Il diagramma a blocchi è mostrato in figura 4. Non è stato possibile scegliere come spazio di stato lo spazio di fase perché $m > 0$, cioè compaiono derivate dell'ingresso $u(t)$ al secondo membro della equazione differenziale.

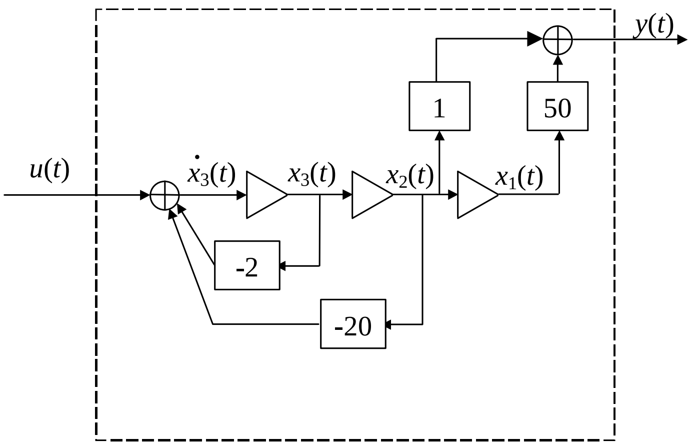

Figura 4: Diagramma a blocchi della realizzazione in variabili di stato.

7. *(6 punti) Assunto $\rho = 10$, si valuti applicando il criterio di Routh se per il sistema assegnato risultano verificate le condizioni che assicurano l'esistenza della risposta armonica. In caso affermativo si calcoli la risposta a regime conseguente all'applicazione dell'ingresso $u(t) = 2\sin(4t + \pi/4)$.*

Assunto $\rho = 10$, la funzione di trasferimento vale

$$W(s) = \frac{s+50}{s^3 + 2s^2 + 20s + 10}.$$

Valuto la stabilità del sistema applicando il criterio di Routh al polinomio caratteristico $D(s) = s^3 + 2s^2 + 20s + 10$.

Costruiamo ora la tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 20 \\ 2 & 2 & 10 \\ 1 & 15 & \\ 0 & 10 & \end{array}$$

Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità BIBO è che lungo la prima colonna non vi siano variazioni di segno. Possiamo concludere che il sistema è stabile in senso BIBO.

Poiché il sistema è stabile esiste la risposta armonica.

Calcoliamo la $W(j\omega)$ per $\omega = 4$. Vale

$$W(j4) = \frac{50 + j4}{-22 + j16} = 1.84\, e^{\,-j2.433} = |W(j4)|\, e^{\,j\angle W(j4)}$$

e dunque la risposta a regime vale

$$y(t) = 2\,|W(j4)|\;\sin\left(4t + \pi/4 + \;\angle W(j4)\;\right) = 3.68\;\sin\left(4t - 1.647\right).$$