Analisi dei Sistemi

Soluzione del compito del 1 Giugno 2002

1. Il sistema descritto dal modello

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -40 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 20 & -5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} & + u(t) \end{array} \right. \tag{1}$$

è:

- lineare: la rappresentazione è nella forma standard

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\vec{x}}(t) & = & A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \\ \vec{y}(t) & = & C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t) \end{array} \right. \tag{2}$$

  costituita da n equazioni differenziali lineari del primo ordine e da una trasformazione lineare d'uscita
- stazionario: le matrici A, B, C, D sono costanti e non dipendono dal tempo;
- dinamico: il sistema di equazioni è di ordine $n = 2 > 0$;
- a parametri concentrati: non vi sono derivate parziali;
- senza elementi di ritardo: non vi sono argomenti in t e argomenti traslati nel tempo della forma $(t - T)$;
- proprio ma non strettamente: un modello della forma (2) descrive sempre un sistema proprio ed in particolare strettamente proprio se e solo la matrice D è nulla (in questo caso invece $D = 1$).

2. La matrice A è diagonale. Dunque posso scrivere direttamente che la matrice di transizione dello stato per tale sistema vale

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-40t} & 0 \\ 0 & e^{-2.5t} \end{bmatrix}.$$

L'uscita vale per $t \geq 0$:

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$$

con i due termini dati dalla la formula di Lagrange

$$y_\ell(t) = Ce^{At}\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 20 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-40t} & 0 \\ 0 & e^{-2.5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 40e^{-40t} - 15e^{-2.5t},$$

e, essendo $u(t) = 1$ per $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} y_f(t) &= C\int_0^t e^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau + Du(t) = \begin{bmatrix} 20 & -5 \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-40\tau} & 0 \\ 0 & e^{-2.5\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \end{bmatrix} d\tau + 1 \\ &= \begin{bmatrix} 20 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\int_0^t e^{-40\tau}d\tau \\ -0.5\int_0^t e^{-2.5\tau}d\tau \end{bmatrix} + 1 = 1.5 + 0.5e^{-40t} - e^{-2.5t}. \end{aligned}$$

3. La matrice risolvente vale

$$[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s+40 & 0 \\ 0 & s+2.5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+40} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2.5} \end{bmatrix}.$$

Trasformando secondo Laplace la (1) si ottiene con semplici passaggi:

$$Y(s) = Y_\ell(s) + Y_f(s)$$

con

$$Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1}\,\vec{x}(0) = \frac{40}{s+40} - \frac{15}{s+2.5}$$

ed essendo $U(s) = \frac{1}{s}$

$$Y_f(s) = \left[C(sI - A)^{-1}\,B + D\right]U(s) = -\frac{20}{s(s+40)} + \frac{2.5}{s(s+2.5)} + \frac{1}{s}$$

4. Posso antitrasformare direttamente $Y_\ell(s)$ ottenendo

$$\mathcal{L}^{-1}\left[Y_\ell(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{40}{s+40}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{15}{s+2.5}\right] = \left[40e^{-40t} - 15e^{-2.5t}\right]\;\delta_{-1}(t)$$

mentre lo sviluppo di Heaviside dei primi due termini che compongono la $Y_f(s)$ ci da

$$-\frac{20}{s(s+40)} = -\frac{0.5}{s} + \frac{0.5}{s+40} \qquad \text{e} \qquad \frac{2.5}{s(s+2.5)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2.5}$$

e dunque

$$Y_f(s) = \frac{1.5}{s} + \frac{0.5}{s+40} - \frac{1}{s+2.5}$$

e antitrasformando

$$\mathcal{L}^{-1}\left[Y_f(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1.5}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0.5}{s+40}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2.5}\right] = \left[1.5 + 0.5e^{-40t} - e^{-2.5t}\right]\;\delta_{-1}(t)$$

Tali valori coincidono, come atteso, con quelli trovati al punto 2.

5. La funzione di trasferimento vale

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = -\frac{20}{(s+40)} + \frac{2.5}{(s+2.5)} + 1 = \frac{s^2 + 25s + 150}{s^2 + 42.5s + 100} + \frac{(s+10)\,(s+15)}{(s+40)\,(s+2.5)}$$

e dunque tale funzione ha zeri $z_1 = -10$, $z_2 = -15$ e poli $p_1 = -40$, $p_2 = -2.5$.
Il guadagno di Bode vale (non essendovi poli in $s = 0$)

$$K = W(0) = \frac{3}{2}.$$

Al polo $p_1 = -40$ è associato il modo $e^{p_1 t} = e^{-40t}$, che ha costante di tempo $\tau_1 = -\frac{1}{p_1} = \frac{1}{40}$.
Al polo $p_2 = -2.5$ è associato il modo $e^{p_2 t} = e^{-2.5t}$, che ha costante di tempo $\tau_2 = -\frac{1}{p_2} = \frac{1}{2.5} = \frac{16}{40}$.
Poiché $\tau_2 > \tau_1$, il modo più lento ad estinguersi è il secondo.

6. Passo alla forma di Bode

$$W(j\omega) = \frac{3}{2}\frac{(1 + \frac{j\omega}{10})(1 + \frac{j\omega}{15})}{(1 + \frac{j\omega}{40})(1 + \frac{j\omega}{2.5})}.$$

Vale:

$$K = \frac{3}{2} \qquad \text{e} \qquad K_{db} = 20\log_{10}(K) = 3.5\;db.$$

Il diagramma di Bode è mostrato in Figura 1.

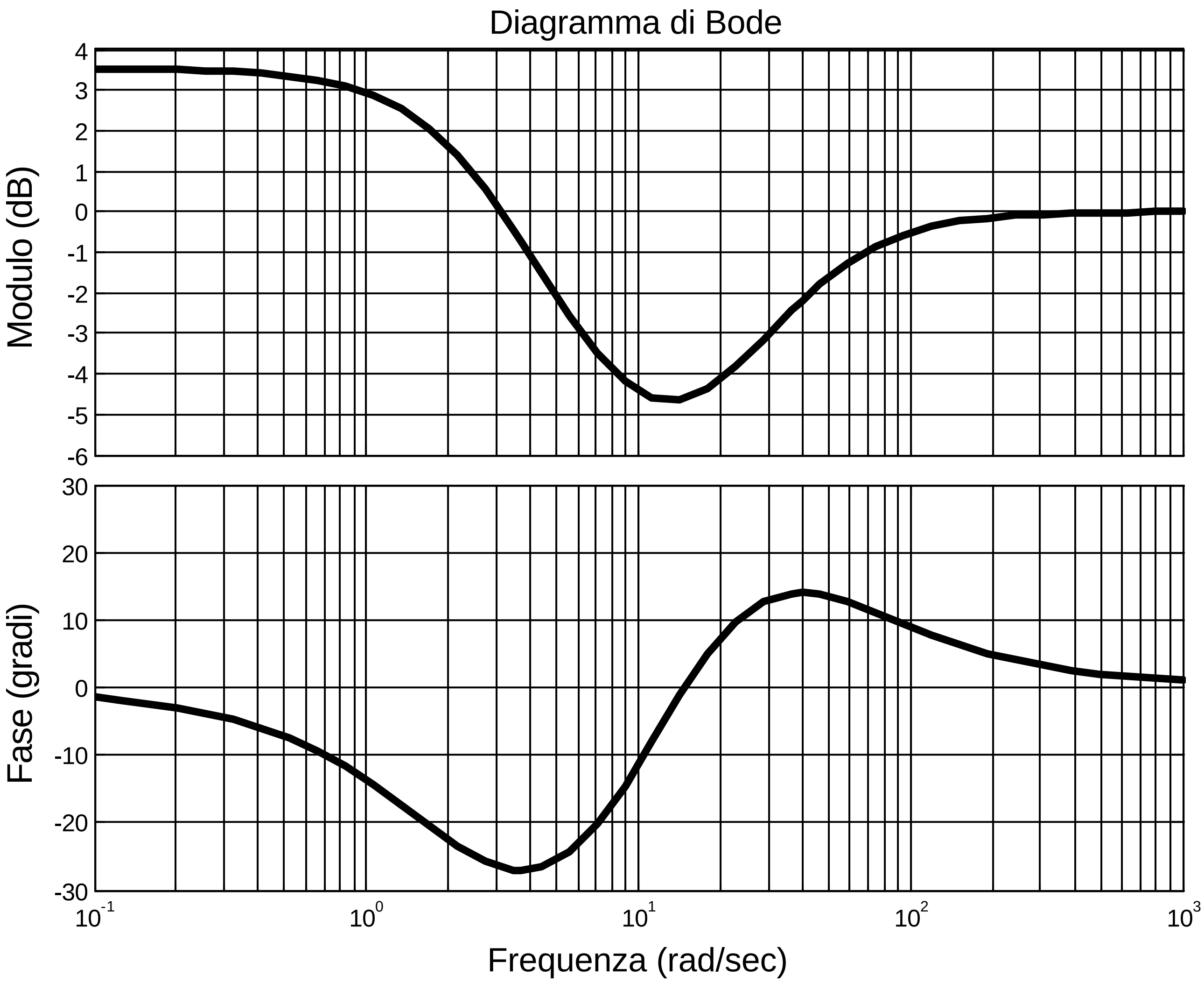

Figura 1: Diagramma completo di Bode.

7. Dal diagramma di Bode si osserva che la massima attenuazione si ottiene per una frequenza pari a $\omega_m = 14 rad/sec$ e la corrispondente attenuazione vale circa $|W(j\omega_m)|_{db} = -4.5db$.

   L'ampiezza dell'ingresso $u(t)$ dato vale $U = 1$. Dunque $Y = |W(j\omega_m)|U = |W(j\omega_m)|$ e quindi $Y_{db} = |W(j\omega_n m)|_{db} = -4.5db$.

   Finalmente dalla definizione di decibel si ottiene

$$Y_{db} = 20\ \log_{10}(Y) \qquad \Longrightarrow \qquad Y = 10^{\frac{Y_{db}}{20}} = 10^{\frac{-4.5}{20}} = 0.6$$

   NB: Se ci si limitasse a tracciare il diagramma asintotico dei moduli, si osserverebbe una massima attenuazione per tutti i valori di ω compresi nell'intervallo $[10, 15]$, mentre il valore dell'attenuazione è di circa $-8.5db$ che corrisponde al valore $Y = 0.38$. Anche tale risposta approssimata è da ritenersi corretta.