Analisi dei Sistemi

Soluzione del compito del 28 Febbraio 2002

Esercizio 1. *Per i due sistemi descritti dai modelli seguenti, individuare le proprietà strutturali che li caratterizzano: lineare o non lineare, stazionario o tempovariante, dinamico o istantaneo, a parametri concentrati o distribuiti, con o senza elementi di ritardi, proprio (strettamente o meno) o improprio. Motivare le risposte.*

1. *(4 punti) Legame ingresso-uscita:*

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 5\dot{u}(t)u(t).$$

2. *(4 punti) Rappresentazione in variabili di stato:*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & t^2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 3\,u(t). \end{cases}$$

Il sistema descritto dal primo modello è:

- non-lineare: l'equazione differenziale non è lineare a causa del termine $\dot{u}(t)u(t)$;
- stazionario: i coefficienti dei singoli termini non dipendono dal tempo;
- dinamico: l'equazione differenziale è di ordine $n = 2 > 0$;
- a parametri concentrati: non vi sono derivate parziali;
- senza elementi di ritardo: non vi sono argomenti in t e argomenti traslati nel tempo della forma $(t - T)$;
- strettamente proprio: l'ordine massimo di derivazione dell'uscita vale $n = 2$ mentre l'ordine massimo di derivazione dell'ingresso vale $m = 1$ e dunque $n > m$.

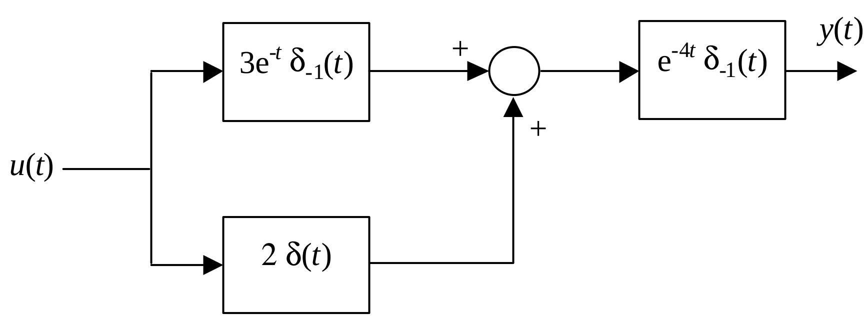
Il sistema descritto dal secondo modello è:

- lineare: la rappresentazione è nella forma standard costituita da n equazioni differenziali lineari del primo ordine e da una trasformazione lineare d'uscita

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \\ \vec{y}(t) = C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t) \end{cases} \tag{1}$$

- non stazionario: la matrice A non è costante ma dipende dal tempo;
- dinamico: il sistema di equazioni è di ordine $n = 2 > 0$;
- a parametri concentrati: non vi sono derivate parziali;
- senza elementi di ritardo: non vi sono argomenti in t e argomenti traslati nel tempo della forma $(t - T)$;
- proprio ma non strettamente: un modello della forma (**??**) descrive sempre un sistema proprio ed in particolare strettamente proprio se e solo la matrice D è nulla (in questo caso invece $D = 3$).

Esercizio 2. *Si consideri il sistema in figura caratterizzato dalle risposte impulsive dei singoli blocchi.*



1. *(4 punti) Si calcoli la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$ scrivendola nella forma di Bode. Quanto vale il guadagno?*

Trasformiamo secondo Laplace e definiamo $R_1(s)$, $R_2(s)$ e $R(s)$ le trasformate di segnali presi in punti opportuni del diagramma come in figura 1. Vale:

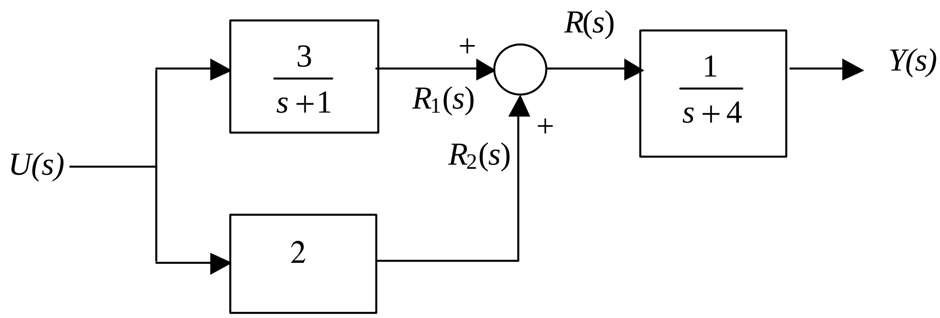


Figura 1: Diagramma di un sistema interconnesso nell'esercizio 2.

$$
\begin{aligned}
R_1(s) &= \frac{3}{s+1}U(s) \\
R_2(s) &= 2U(s) \\
R(s) &= R_1(s) + R_2(s) = \frac{2s+5}{s+1}U(s) \\
Y(s) &= \frac{1}{s+4}R(s) = \frac{2s+5}{(s+1)(s+4)}U(s)
\end{aligned}
$$

da cui si ricava:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{2s+5}{(s+1)(s+4)} = \frac{5}{4}\frac{(1+0.4s)}{(1+s)(1+0.25s)}$$

e il guadagno vale $K = \frac{5}{4}$.

Esercizio 3. *Si consideri un sistema il cui legame ingresso uscita è descritto dalla seguente equazione differenziale:*

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 2\dot{u}(t) + u(t).$$

1. *(4 punti) Si determini una rappresentazione $\{A, B, C, D\}$ in termini di variabili di stato di tale sistema dandone una rappresentazione grafica mediante un diagramma con blocchi di integratori.*

2. *(4 punti) Si determini una trasformazione di similitudine $\vec{z}(t) = P^{-1}x(t)$ che porta ad una rappresentazione in cui la matrice di stato $A' = P^{-1}AP$ è in forma diagonale.*

3. *(4 punti) Per la nuova rappresentazione scegliere un vettore di stato iniziale $\vec{z}(0)$ a piacere (ma con tutte le componenti diverse da zero). Si determini l'evoluzione libera dello stato a partire da $\vec{z}(0)$ e l'evoluzione forzata dello stato conseguente alla applicazione dell'ingresso a gradino $u(t) = 3\delta_{-1}(t)$.*

1. Una possibile rappresentazione in variabili di stato per questo sistema con $n = 2$ e $m = 1$ assume la

forma

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_2} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

ovvero, passando ai valori numerici,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Il diagramma a blocchi è mostrato in figura 2.

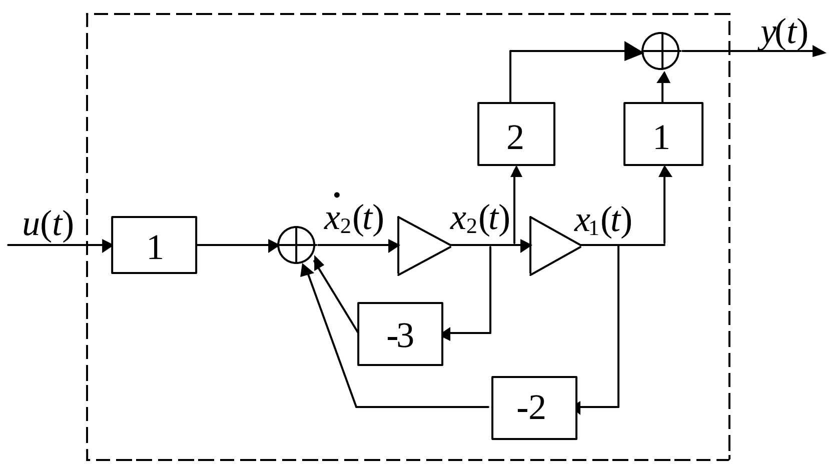


Figura 2: Diagramma a blocchi della rappresentazione nell'esercizio 3.

2. La trasformazione di similitudine che consente di passare ad una rappresentazione in cui A' è diagonale usa come matrice P la matrice modale, costituita dagli autovettori di A.

   Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ (sono dunque distinti). L'autovettore $\vec{v}$ che corrisponde ad un generico autovalore λ soddisfa l'equazione $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, ossia si determina cercando una soluzione non nulla del sistema (sottodeterminato) di equazioni

$$(A - \lambda I)\,\vec{v} = \vec{0}.$$

L'autovalore $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ associato a λ_1 si ricava dunque dal sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che è soddisfatto da vettori della forma $\begin{bmatrix} x & -x \end{bmatrix}^T$. Scelgo $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

L'autovalore $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ associato a λ_2 si ricava dal sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che è soddisfatto da vettori della forma $\begin{bmatrix} x & -2x \end{bmatrix}^T$. Scelgo $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$.

Vale quindi[1]

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

mentre la nuova rappresentazione vale

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \\ B' &= P^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \\ C' &= CP = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \\ D' &= D = 0. \end{aligned}$$

3. Per il nuovo sistema

$$\begin{cases} \dot{\vec{z}}(t) &= A'\vec{z}(t) + B'\vec{u}(t) \\ \vec{y}(t) &= C'\vec{z}(t) \end{cases}$$

scelgo $\vec{z}(0) = \begin{bmatrix} 12 & 11 \end{bmatrix}^T$.

[1] N.B. La scelta $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_2 & \vec{v}_1 \end{bmatrix}$ è ugualmente ammissibile.

Essendo la matrice A' diagonale possiamo immediatamente scrivere

$$e^{A't} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

e dunque l'evoluzione libera dello stato vale per $t \geq 0$:

$$z_\ell(t) = e^{A't}\vec{z}(0) = \begin{bmatrix} 12e^{-t} \\ 11e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

L'evoluzione forzata dello stato vale per $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \vec{z}_f(t) &= \int_0^t e^{A'\tau}B'u(t-\tau)d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 0 & e^{-2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 3d\tau \\ &= 3\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau} \\ -e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 3(1-e^{-t}) \\ -\frac{3}{2}(1-e^{-2t}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 4. *È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u. \end{cases}$$

1. *(4 punti) Si dia la definizione delle proprietà di controllabilità e di osservabilità per un sistema lineare e stazionario. Si determini se tale rappresentazione è controllabile e osservabile.*
2. *(4 punti) Si valuti la stabilità della rappresentazione secondo Lyapunov e la stabilità in senso BIBO.*

1. Possiamo dire che una rappresentazione è
   - *controllabile* se a partire da uno stato iniziale $\vec{x}(0) \neq \vec{0}$ è possibile grazie ad un opportuno ingresso raggiungere lo stato $\vec{x}(t) = \vec{0}$ in un tempo finito t;

- *osservabile* se osservando l'evoluzione libera dell'uscita per un intervallo finito $[0, t]$ è possibile risalire al valore dello stato iniziale $\vec{x}(0)$.

Due semplici criteri consentono di valutare se un sistema gode di queste proprietà.

- La matrice di controllabilità del sistema vale

$$\left[\begin{array}{c|c} B & AB \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

  e ha rango $r = 2$ pari all'ordine del sistema $n = 2$. Dunque la rappresentazione è controllabile.
- La matrice di osservabilità del sistema vale

$$\left[\begin{array}{c} C \\ \hline CA \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

  e ha rango $r = 2$ pari all'ordine del sistema $n = 2$. Dunque la rappresentazione è osservabile.

2. Gli autovalori della matrice A sono le radici del polinomio $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$ e valgono $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm j\sqrt{0.75}$.

   Dunque essendo a parte reale negativa la rappresentazione è asintoticamente stabile secondo Lyapunov. Tali autovalori caratterizzano anche i modi del sistema che si ritroveranno nell'evoluzione libera (in particolare essendo il sistema controllabile e osservabile tutti questi modi saranno presenti): dunque il sistema è anche BIBO stabile.