Analisi dei Sistemi

Soluzione del compito del 5 Febbraio 2002

Esercizio 1. La funzione di trasferimento data vale $W(s) = \dfrac{s+3}{10s^4 + 20s^3 + 8s^2 + 8s + \rho}$.

1. La stabilità del sistema dipende dalla radici del polinomio caratteristico

$$D(s) = 10s^4 + 20s^3 + 8s^2 + 8s + \rho.$$

Possiamo subito dire che è necessario per la stabilità BIBO che i coefficienti del polinomio siano tutti dello stesso segno e dunque valga $\rho > 0$.

Costruiamo ora la tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 10 & 8 & \rho \\ 3 & 20 & 8 & \\ 2 & 4 & \rho & \\ 1 & 8-5\rho & & \\ 0 & \rho & & \end{array}$$

Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità BIBO è che lungo la prima colonna non vi siano variazioni di segno, ovvero deve valere $\rho > 0$ e $8 - 5\rho > 0$. Possiamo concludere che il sistema è stabile in senso BIBO per $0 < \rho < 1.6$.

Discutiamo i casi limite.

- Se $\rho = 0$, vale $D(s) = 10s^4 + 20s^3 + 8s^2 + 8s$. Dunque $D(s)$ ha una radice in $s = 0$ e il sistema è al limite di stabilità.
- Se $\rho = 1.6$, si annulla la riga di ordine 1 (riga dispari) e possiamo scomporre $D(s) = R(s)Q(s)$.
  - Il polinomio $R(s)$ ha grado due e le sue radici sono in $\mathbb{C}^-$, come si vede dalle permanenze $4 \to 3$ e $3 \to 2$.
  - Il polinomio $Q(s)$ è un polinomio in s^2 che ha per coefficienti gli elementi della riga 2, cioè $Q(s) = 4s^2 + \rho = 4s^2 + 1.6$. Esso ha dunque radici immaginarie $\pm j\sqrt{0.4}$.

  Concludiamo dunque che anche in questo caso il sistema è al limite di stabilità.

  Comunque anche senza calcolarne le radici, possiamo verificare che il polinomio $Q(s)$ non radici a parte reale positiva. Per far ciò proseguiamo la costruzione della tabella mettendo al posto della riga 1 che si annulla la riga $1'$ contenente i coefficienti del polinomio $T(s) = \frac{d}{ds}Q(s) = 8s$ e dunque vale:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 10 & 8 & 1.6 \\ 3 & 20 & 8 & \\ 2 & 4 & 1.6 & \\ 1' & 8 & & \\ 0 & 1.6 & & \end{array}$$

  Le due permanenze $2 \to 1'$ e $1' \to 0$ ci permettono di concludere che $Q(s)$ non ha radici in $\mathbb{C}^+$ e dunque neanche radici in $\mathbb{C}^-$: le due sue radici sono quindi lungo l'asse immaginario.

2. Se $\rho = 1$ la funzione di trasferimento vale:

$$W(s) = \frac{s+3}{10s^4 + 20s^3 + 8s^2 + 8s + 1}.$$

Il guadagno di Bode vale

$$K = \frac{b_0}{a_0} = \frac{3}{1} = 3.$$

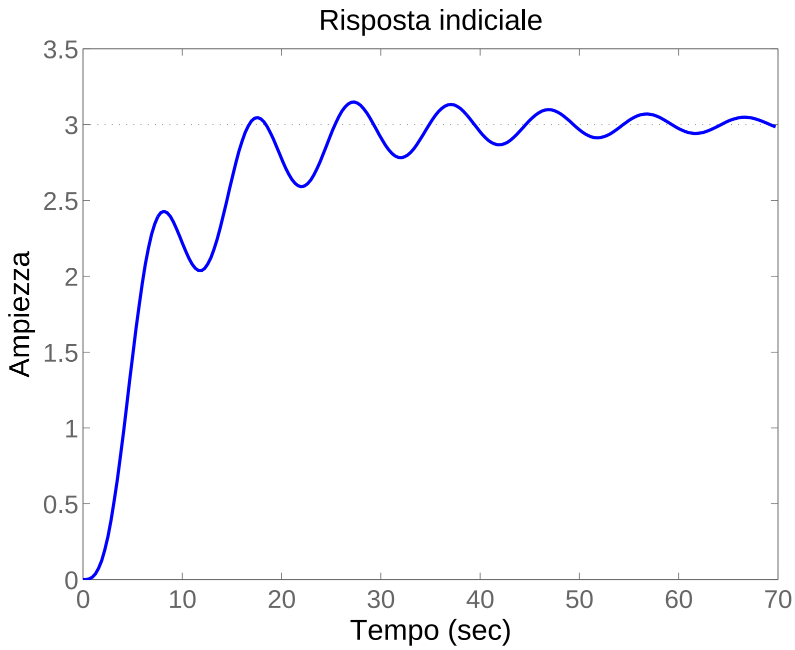

Figura 1: Risposta indiciale: il valore di regime è $K = 3$.

Poiché il sistema è stabile per $\rho = 1$, K rappresenta il valore costante a cui tende a regime la risposta indiciale (cioè la risposta al gradino unitario), come mostrato in figura 1.

3. Poiché il sistema è stabile per $\rho = 1$, esiste la risposta armonica.

   Calcoliamo la $W(j\omega)$ per $\omega = 2$. Vale

$$W(j2) = \frac{3 + j2}{129 - j144} = 0.0186\ e^{j1.43}$$

   e dunque la risposta a regime vale

$$y(t) = 3\ |W(j2)|\ \sin\left(2t + \ \angle W(j2)\ \right) = 0.0558\ \sin\left(2t + 1.43\right).$$

Esercizio 2. La funzione di trasferimento data vale $W(s) = \dfrac{400s + 40}{s\ (s+2)\ (s+10)}$.

1. Passo alla forma di Bode

$$W(j\omega) = 2 \frac{(1 + j\omega\ 10)}{s(1 + \frac{j\omega}{2})(1 + \frac{j\omega}{10})}.$$

   Vale:

$$K = 2 \qquad \text{e} \qquad K_{db} = 20 \log_{10}(K) = 6\ db.$$

   I diagrammi asintotici dei moduli dei singoli termini sono tracciati con diversi colori in figura 2a, mentre il diagramma asintotico complessivo che si ottiene dalla loro somma è tracciato in nero.

   I diagrammi delle fasi dei singoli termini sono tracciati con diversi colori in figura 2b, mentre il diagramma complessivo che si ottiene dalla loro somma è tracciato in nero. Il diagramma completo dei moduli e delle fasi tracciato con MATLAB è mostrato in figura 3.

2. Per tale funzione vale $K' = 400$ e $K = 2$. Vi è un polo nell'origine e dunque $\nu = 1$. Infine vi sono in totale $n = 3$ poli e $m = 1$ zeri.

   Per tracciare il diagramma di Nyquist della funzione $W(j\omega)$ consideriamo il modulo M e la fase φ per i valori limite $\omega = 0$ e $\omega = +\infty$.

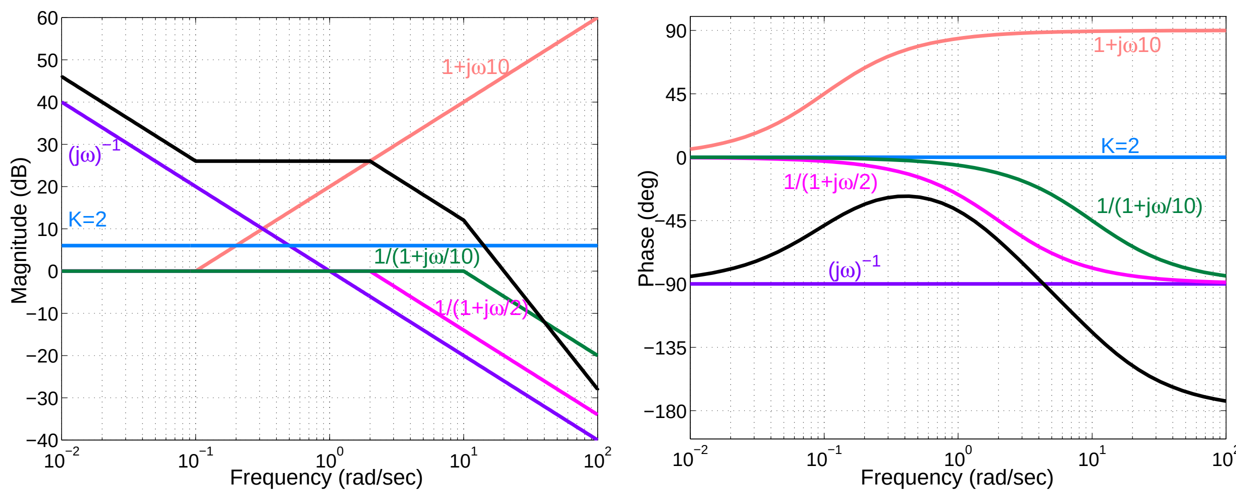

Figura 2: Diagramma asintotico di Bode dei moduli (a) e diagramma delle fasi (b).

- Se $\omega = 0$ a causa del polo nell'origine vale:

$$\begin{array}{ll} \text{modulo} & M = +\infty; \\ \text{fase} & \varphi = \angle K - \nu\frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}. \end{array}$$

- Se $\omega = +\infty$ vale

$$\begin{array}{ll} \text{modulo} & M = 0; \qquad \text{(poiché } n > m \text{)} \\ \text{fase} & \varphi = \angle K' - (n-m)\frac{\pi}{2} = 0 - \pi = -\pi. \end{array}$$

Dal diagramma di Bode si osserva che il modulo è sempre decrescente tranne che nell'intervallo di pulsazioni $[0.1, 2]$ in cui resta praticamente costante. La fase partendo da $-\frac{\pi}{2}$ è prima crescente sino a raggiungere circa $-\frac{\pi}{6}$ e poi descrescente tendendo asintoticamente a $-\pi$. Il diagramma di Nyquist tracciato con Matlab è mostrato in figura 4.

Esercizio 3.

1. La funzione di trasferimento vale:

$$\begin{aligned} W(s) &= C(sI-A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+3} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \\ &= \frac{2}{s+3} + \frac{1}{s+2} + 3 = \frac{3s^2+18s+25}{s^2+5s+6} \end{aligned}$$

Al penultimo membro è dato lo sviluppo di Heaviside della $W(s)$ e possiamo direttamente antitrasformare ottenendo

$$w(t) = \left(2e^{-3t} + e^{-2t}\right)\ \delta_{-1}(t) + 3\delta(t).$$

2. L'evoluzione libera vale per $t \geq 0$:

$$y_\ell(t) = Ce^{At}\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-3t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 6e^{-3t} + 4e^{-2t}.$$

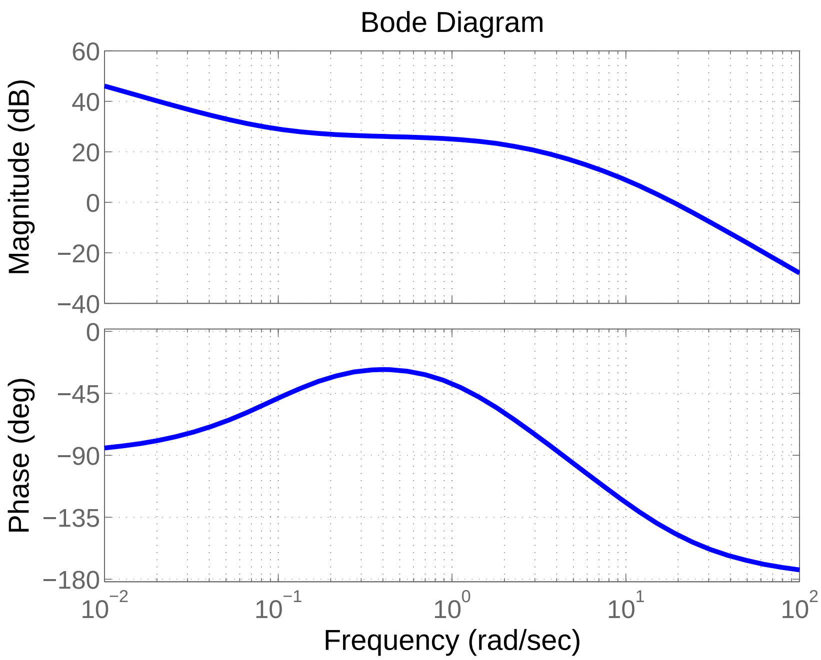

Figura 3: Diagramma completo di Bode.

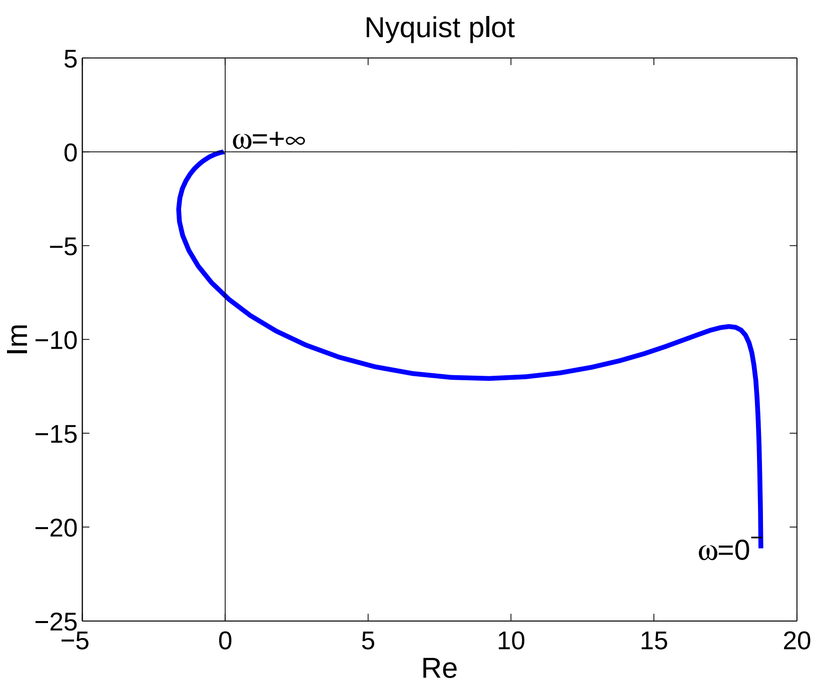

Figura 4: Diagramma di Nyquist.