Analisi dei Sistemi

Soluzione del compito del 22 Gennaio 2002

Esercizio 1. E' dato un sistema descritto dal modello ingresso-uscita

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 7\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 32\frac{d}{dt}y(t) + 60y(t) = 3\frac{d}{dt}u(t) + 3u(t)$$

1. L'equazione differenziale è nella forma:
$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)}(t)$$
e dunque il sistema descritto da tale modello è:
   (a) lineare: l'equazione differenziale è lineare;
   (b) stazionario: i coefficienti a_i e b_i non dipendono dal tempo;
   (c) dinamico: l'equazione differenziale è di ordine $n = 3 > 0$;
   (d) a parametri concentrati: non vi sono derivate parziali;
   (e) senza elementi di ritardo: non vi sono argomenti traslati nel tempo della forma $(t - T)$;
   (f) strettamente proprio: vale $n = 3$ e $m = 1$ e dunque $n > m$.

2. Poiché
$$P(s) = (s + 3)(s^2 + 4s + 20) = s^3 + 7s^2 + 32s + 60$$
esso è il polinomio caratteristico del sistema (infatti ha per coefficienti i termini a_i).
Le radici sono: $p_1 = -3$, $p_{2,3} = \alpha \pm j\omega = -2 \pm j4$, a cui corrispondono i due modi:
   - $e^{p_1 t} = e^{-3t}$, un modo aperiodico stabile con costante di tempo
   $$\tau = -\frac{1}{p_1} = \frac{1}{3};$$
   - $e^{\alpha t}\cos(\omega t) = e^{-2t}\cos(4t)$, un modo pseudo-periodico con pulsazione naturale
   $$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} = \sqrt{20} = 4.47$$
   e coefficiente di smorzamento
   $$\zeta = -\frac{\alpha}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

   L'andamento dei modi è tracciato in figura 1.

3. La funzione di trasferimento vale:
$$W(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{3s + 3}{s^3 + 7s^2 + 32s + 60}.$$
Lo sviluppo di Heaviside vale:
$$W(s) = \frac{R_1}{s + 3} + \frac{R}{s + 2 - j4} + \frac{\overline{R}}{s + 2 + j4},$$

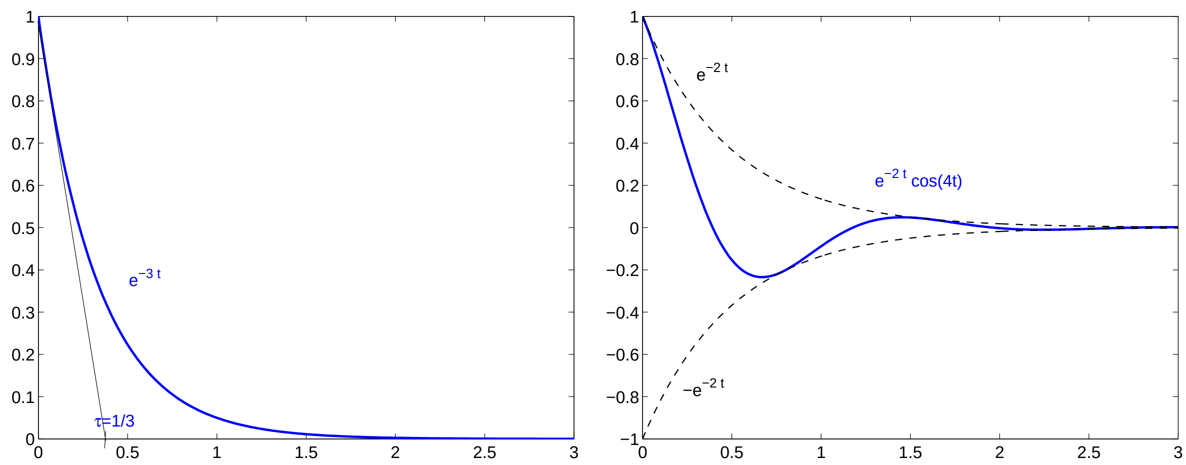

Figura 1: Andamento dei modi.

dove

$$R_1 = \lim_{s \to -3} (s+3)W(s) = -\frac{6}{17} = -0.3529,$$

e

$$R = \lim_{s \to -2+j4} (s+2-j4)W(s) = 0.1765 - j0.3309.$$

Sia $M = |R| = \frac{3}{8} = 0.375$ e $\phi = \angle R = -62^\circ = -1.0808$ rad.

Per calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ antitrasformo la $W(s)$:

$$w(t) = \left[R_1 e^{-3t} + 2Me^{-2t}\cos(4t+\phi)\right]\ \delta_{-1}(t) = \left[-\frac{6}{17}e^{-3t} + \frac{3}{4}e^{-2t}\cos(4t-1.0808)\right]\ \delta_{-1}(t).$$

4. Passo alla forma di Bode

$$W(j\omega) = \frac{1}{20}\frac{(1+j\omega)}{(1+\frac{j\omega}{3})(1-\frac{\omega^2}{20}+\frac{j\omega}{5})}.$$

Vale:

$$K = \frac{1}{20} \qquad \text{e} \qquad K_{bd} = 20\log_{10}(K) = -26\ db.$$

I diagrammi asintotici dei moduli dei singoli termini sono tracciati con diversi colori in figura 2a, mentre il diagramma asintotico complessivo che si ottiene dalla loro somma è tracciato in nero. I diagrammi delle fasi dei singoli termini sono tracciati con diversi colori in figura 2b, mentre il diagramma complessivo che si ottiene dalla loro somma è tracciato in nero. Il diagramma completo dei moduli e delle fasi tracciato con MATLAB è tracciato in figura 3.

5. La rappresentazione in variabili di stato è

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_3} & -\frac{a_1}{a_3} & -\frac{a_2}{a_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a_3} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

ovvero, passando ai valori numerici,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -60 & -32 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

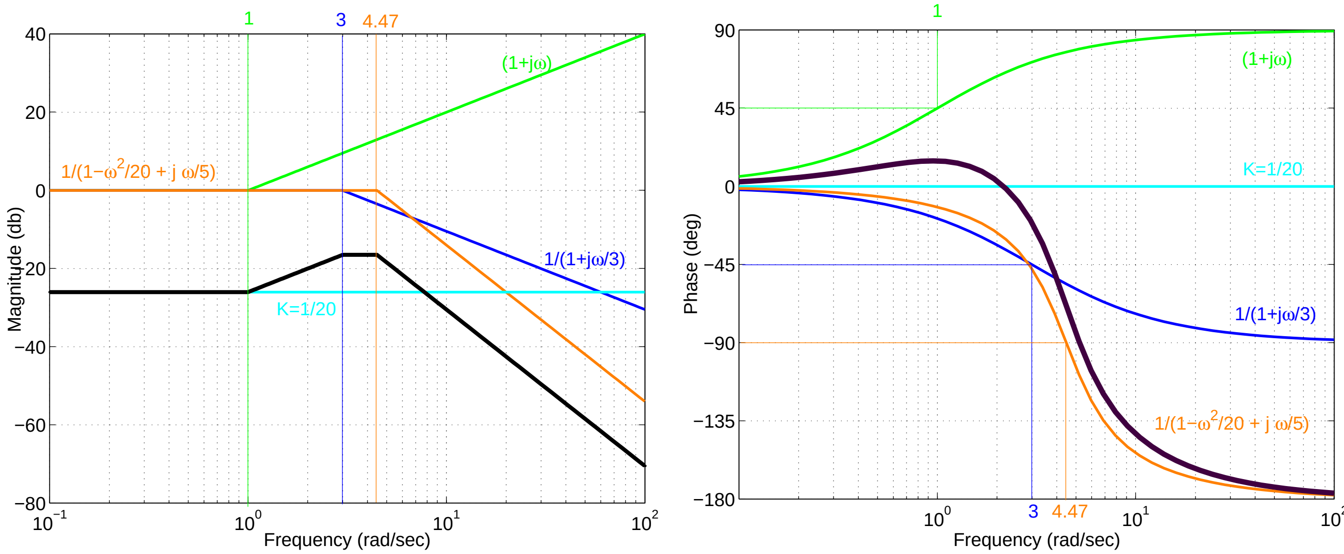

Figura 2: Diagramma asintotico di Bode dei moduli (a) e diagramma delle fasi (b).

Il diagramma a blocchi è mostrato in figura 4. Non è stato possibile scegliere come spazio di stato lo spazio di fase perché $m > 0$, cioè compaiono derivate dell'ingresso $u(t)$ al secondo membro della equazione differenziale.

Esercizio 2. La matrice del sistema A ha autovalori distinti $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -4$.

1. Per determinare e^{At} scriviamo il sistema

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} & = \alpha_0(t) + \lambda_1 \alpha_1(t) \\ e^{\lambda_2 t} & = \alpha_0(t) + \lambda_2 \alpha_1(t) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} e^{-3t} & = \alpha_0(t) - 3\alpha_1(t) \\ e^{-4t} & = \alpha_0(t) - 4\alpha_1(t) \end{cases}$$

   da cui si ricava

$$\begin{cases} \alpha_0(t) & = 4e^{-3t} - 3e^{-4t} \\ \alpha_1(t) & = e^{-3t} - e^{-4t} \end{cases}$$

   Dunque

$$e^{At} = \alpha_0(t) I_2 + \alpha_1(t) A = \begin{bmatrix} e^{-3t} & (e^{-3t} - e^{-4t}) \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

2. Gli autovalori della matrice A sono a parte reale negativa. Dunque il sistema è asintoticamente stabile secondo Lyapunov e stabile in senso BIBO.

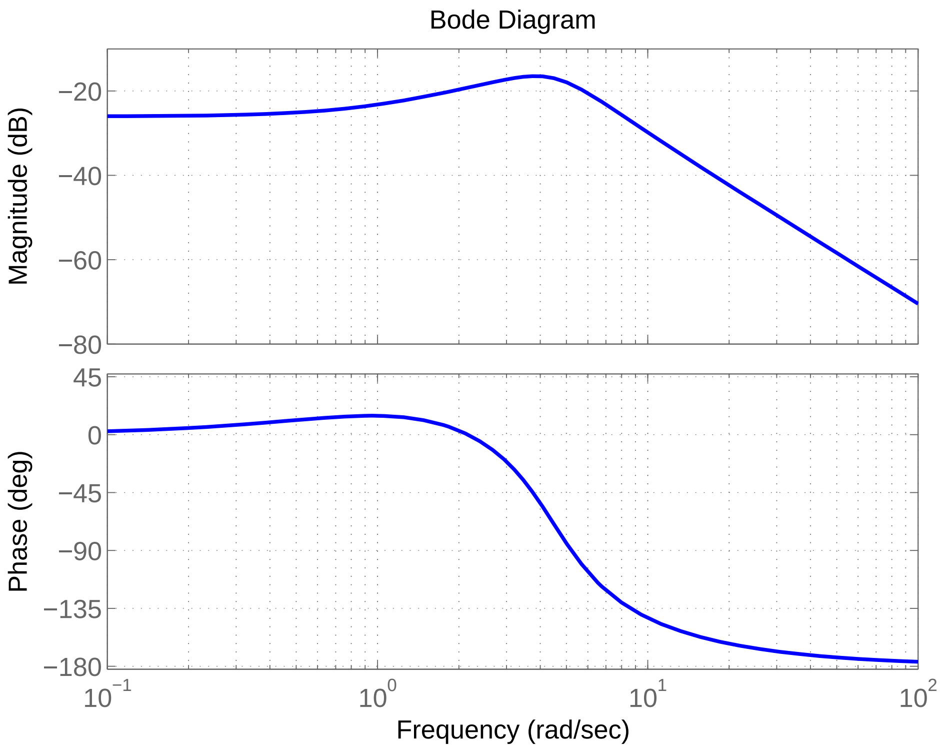

Figura 3: Diagramma completo di Bode.

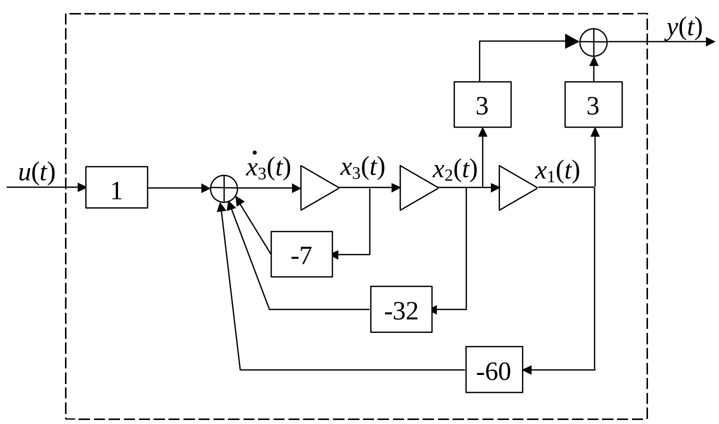

Figura 4: Diagramma a blocchi.