

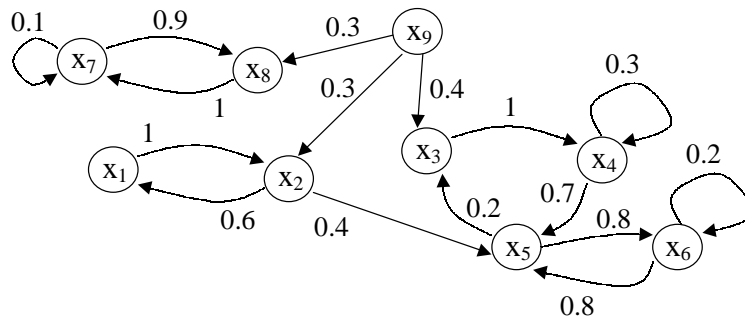
Automazione Industriale

Esercitazione 3

24 Marzo 2007

Esercizio 1

Si consideri la CMTD in figura.



- Si individuino le componenti fortemente connesse (massimali).
- Si stabilisca quali tra queste sono transienti e quali ergodiche.
- Si specifichi se le eventuali componenti ergodiche sono periodiche o aperiodiche (nel primo caso si indichi anche quanto vale il periodo).
- Si stabilisca se tale CMTD è ergodica e si spieghi cosa implica la proprietà di ergodicità.
- Si stabilisca se tale analisi cambierebbe cambiando il peso associato agli archi (senza però porre a zero il peso di alcun arco).
- Nel caso in cui la risposta al punto (d) sia negativa si stabilisca se è possibile rendere la catena ergodica semplicemente cambiando il verso di un arco.

Esercizio 2

Rappresentare il grafo della catena di Markov a tempo discreto il cui insieme di stati è $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e la cui matrice di probabilità di transizione è la seguente:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinare mediante il criterio degli autovalori l'ergodicità della catena. Calcolarne le componenti stazionarie.

Esercizio 3

Un sistema di lavorazione è costituito da un unico servente in grado di lavorare un solo pezzo alla volta. Ogni 5 secondi, con probabilità $a = 0.7$, arriva un pezzo nel sistema di lavorazione. Con probabilità $b = 0.6$ la lavorazione viene eseguita correttamente e il pezzo esce dal sistema. Con probabilità $1 - b$ il pezzo viene riparato e successivamente esce dal sistema. È possibile che contemporaneamente un pezzo esca dal sistema e un altro arrivi.

Rappresentare il grafo della catena di Markov a tempo discreto associata a questo processo e determinare la matrice di probabilità di transizione. Tale sistema è ergodico? Se sì, determinare le probabilità di stato a regime.

Esercizio 4

Un sistema di produzione è costituito da una macchina operatrice alla quale arriva un pezzo ad ogni intervallo di tempo T con probabilità $p = 0.8$. La macchina è dotata di due serventi uguali. Ogni servente quando è impegnato completa la lavorazione in un intervallo di tempo T con probabilità $q = 0.9$. La macchina ha a disposizione per l'arrivo dei pezzi le sole due posizioni di lavoro per cui, se i due serventi sono occupati, un nuovo pezzo in arrivo viene scartato.

- (a) Si rappresenti il grafo della catena di Markov a tempo discreto che descrive il processo di lavorazione (si esprimano i pesi degli archi in funzione di p e q).
- (b) Si valuti l'ergodicità della catena, dopo aver chiarito cosa implica tale proprietà.
- (c) Si calcolino le probabilità di stato in condizioni asintotiche.
- (d) Si calcolino la probabilità che un pezzo in arrivo ha di essere scartato quando la macchina ha raggiunto una configurazione di regime.