Nota sull'ergodicità

Alessandro Giua

17 Marzo 2007

Un processo stocastico $(X, \pi(t))_{t \in T}$ è una collezione di variabili aleatorie $(X, \pi(t))$ indicizzate dal parametro t solitamente detto tempo. Nel caso di processi discreti e a tempo discreto (ma quanto diremo vale per tutti i processi, siano essi continui o a tempo continuo) useremo la seguente notazione:

- *insieme dei tempi*: $T = \{0, 1, 2, \cdots\} = \mathbb{N}$;
- *insieme dei possibili valori* assunti dalla variabile aleatoria: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$;
- *realizzazione* $x(\cdot)$ del processo stocastico: è un segnale $x : T \to X$, ovvero $x(t) \in X$ indica il valore assunto al tempo $t \in T$ dal processo durante una particolare evoluzione;
- *probabilità che si verifichi l'evento x_i al tempo $t \in T$*: $\pi_i(t) = \Pr\{x(t) = x_i\}$;
- *valore atteso* o *media* della generica variabile aleatoria $(X, \pi(t))$ per un istante fissato di tempo $t \in T$:
$$\mu_X(t) = E\left[(X, \pi(t))\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i \pi_i(t); \tag{1}$$
- *media temporale* associata ad una generica realizzazione $x(\cdot)$ al tempo $t \in T$:
$$\hat{\mu}_{x(\cdot)}(t) = \frac{1}{t+1} \sum_{k=0}^{t} x(k). \tag{2}$$

  Per semplicità denoteremo nel seguito la media temporale con $\hat{\mu}(t)$ omettendo l'indicazione della realizzazione.

Definizione 1 *Un processo stocastico è detto* stazionario nella media *se vale*
$$\mu_X(t) = \mu_X = costante \qquad \text{per ogni } t \in T,$$
ovvero se il valore atteso delle diverse variabili aleatorie non varia al trascorrere del tempo.

Per determinare il valore atteso delle generiche variabile aleatorie che costituiscono il processo possiamo costruire la seguente tabella, in cui ogni riga corrisponde ad un istante di tempo t dato e rappresenta la generica distribuzione di probabilità della variabile aleatoria. Mediante la (1) è anche possible calcolare per ogni riga il valore $\mu_X(t)$.

t	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\mu_X(t)$
0	$\pi_1(0)$	$\pi_2(0)$	$\cdots$	$\pi_n(0)$	$\mu_X(0)$
1	$\pi_1(1)$	$\pi_2(1)$	$\cdots$	$\pi_n(1)$	$\mu_X(1)$
2	$\pi_1(2)$	$\pi_2(2)$	$\cdots$	$\pi_n(2)$	$\mu_X(1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$\pi_1(k)$	$\pi_2(k)$	$\cdots$	$\pi_n(k)$	$\mu_X(k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Viceversa per calcolare la media temporale $\hat{\mu}(t)$ dobbiamo considerare una possibile realizzazione

$$x(\cdot) = x(0)\ x(1)\ x(2)\ x(3)\ x(4)\ \cdots$$

e fare la media aritmetica dei primi $t+1$ valori come indicato in (2).

Esempio 1 Si consideri il processo stocastico definito come segue. *Ad ogni istante di tempo si lancia una moneta. Il risultato dell'esperimento sarà* 0 *se esce testa e* 1 *se esce croce.*

Vale dunque $X = \{0, 1\}$ e possiamo costruire la seguente tabella.

t	0	1	$\mu_X(t)$
0	1/2	1/2	1/2
1	1/2	1/2	1/2
2	1/2	1/2	1/2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	1/2	1/2	1/2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Si può osservare che tale processo è stazionario nella media e vale $\mu_X = 1/2$.

Le possibili realizzazioni di tale processo sono infinite. Se si considera una generica realizzazione del processo

$$x(\cdot) = 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ \cdots$$

e se si esegue la media temporale $\hat{\mu}(t)$ lungo tale realizzazione si ottiene:

$$\hat{\mu}(0) = 0; \quad \hat{\mu}(1) = 0; \quad \hat{\mu}(2) = \frac{1}{3}; \quad \hat{\mu}(3) = \frac{1}{4}; \quad \hat{\mu}(4) = \frac{2}{5}; \quad \cdots$$

Si noti che tale processo ammette tra le sue possibili realizzazioni anche

$$x'(\cdot) = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \cdots$$

la cui media temporale, per ogni t, vale $\hat{\mu}(t) = 0$.

Un'altra particolare realizzazione è

$$x''(\cdot) = 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \cdots$$

la cui media temporale vale[1] $\hat{\mu}(t) = \frac{1}{t+1} \left\lfloor \frac{(t+1)}{3} \right\rfloor$. Per $t \to \infty$ la media temporale tende a 1/3.

È facile però capire (legge dei grandi numeri: provare per credere) che eseguendo un esperimento la media temporale tenderà ad 1/2, mentre la probabilità che si verifichi una realizzazione con media temporale diversa, quale $x'(\cdot)$ o $x''(\cdot)$, è nulla. Si dice allora che per tale processo la media temporale *converge in probabilità* ad 1/2 ovvero

$$\underset{t \to \infty}{plim}\, \hat{\mu}(t) = \frac{1}{2}.$$

■

Possiamo infine dare la seguente definizione.

[1]Dato un numero reale x si denota $\lfloor x \rfloor$ l'intero più grande minore o uguale a x. Es: $\lfloor 1/3 \rfloor = \lfloor 2/3 \rfloor = 0$; $\lfloor 1 \rfloor = \lfloor 3/4 \rfloor = 1$.

Definizione 2 *Un processo stocastico è detto* ergodico[2] *se vale*

$$\underset{t \to \infty}{plim}\, \hat{\mu}(t) = \lim_{t \to \infty} \mu_X(t)$$

ovvero se, al crescere di t, la media temporale converge in probabilità allo stesso valore a cui tende il valore atteso delle singole variabili aleatorie.

Nel caso particolare di processi stazionari nella media, il valore atteso delle singole variabili aleatorie è costante e vale μ_X per ogni t. In tal caso la definizione di ergodicità si semplifica come segue.

Definizione 3 *Un processo stocastico stazionario nella media, con valore atteso μ_X, è detto* ergodico *se vale*

$$\underset{t \to \infty}{plim}\, \hat{\mu}(t) = \mu_X,$$

ovvero se, al crescere di t, la media temporale converge in probabilità al valore atteso delle singole variabili aleatorie.

Consideriamo alcuni esempi.

Esempio 2 Per la generica realizzazione del processo stocastico nell'Esempio 1

$$\underset{t \to \infty}{plim}\, \hat{\mu}(t) = \frac{1}{2} = \mu_X$$

e dunque tale processo è ergodico. ■

Esempio 3 Si consideri il seguente processo stocastico. *All'istante di tempo $t = 0$ si lancia una moneta e negli istanti di tempo successivi essa resta nella posizione iniziale. Il risultato dell'esperimento sarà 0 se esce testa e 1 se esce croce.*

Vale $X = \{0, 1\}$ e possiamo costruire la seguente tabella.

t	0	1	$\mu_X(t)$
0	1/2	1/2	1/2
1	1/2	1/2	1/2
2	1/2	1/2	1/2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	1/2	1/2	1/2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tale tabella coincide con quella del processo stocastico dell'Esempio 1. Dunque anche tale processo è stazionario nella media e vale $\mu_X = 1/2$.

Le possibili realizzazioni di tale processo, tuttavia sono soltanto due, entrambe equiprobabili. Una possibile realizzazione è

$$x(\cdot) = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \cdots$$

e se si esegue la media temporale $\hat{\mu}(t)$ lungo tale realizzazione vale

$$\hat{\mu}(t) = 0, \qquad \text{per ogni } t \in T.$$

[2] Più precisamente la Definizione 2 caratterizza i processi *ergodici nella media*. È possibile in maniera analoga definire un processo ergodico nel generico momento (media, varianza, ecc.) e dunque si definisce un processo ergodico in senso stretto se esso è ergodico in tutti i suoi momenti. Noi qui ci limiamo a considerare i processi ergodici nella media e usiamo il termine *ergodico* come sinonimo di *ergodico nella media*.

L'altra possibile realizzazione è

$$x(\cdot) = 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \cdots$$

e se si esegue la media temporale $\hat{\mu}(t)$ lungo tale realizzazione vale

$$\hat{\mu}(t) = 1, \qquad \text{per ogni } t \in T.$$

Tali medie temporali non coincidono con il valore atteso $\mu_X = 1/2$ e dunque tale processo non è ergodico. ■

Esempio 4 Si consideri il seguente processo stocastico. *All'istante di tempo $t = 0$ si lancia una moneta. In ogni istante successivo, se precedentemente è uscita testa la moneta si rilancia, altrimenti essa resta nella posizione precedente. Il risultato dell'esperimento sarà* 0 *se esce testa e* 1 *se esce croce.*

Vale $X = \{0, 1\}$ e possiamo costruire la seguente tabella.

t	0	1	$\mu_X(t)$
0	$1/2$	$1/2$	$1/2$
1	$1/4$	$1 - 1/4$	$1 - 1/4$
2	$1/8$	$1 - 1/8$	$1 - 1/8$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$1/2^{k+1}$	$1 - 1/2^{k+1}$	$1 - 1/2^{k+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
∞	0	1	1

Tale processo non è stazionario nella media e vale $\lim_{t\to\infty} \mu_X(t) = 1$.

Le possibili realizzazioni di tale processo sono ancora infinite. Una possibile realizzazione è

$$x(\cdot) = 0\ 0\ 1\ 1\ \cdots\ 1\ \cdots$$

e se si esegue la media temporale $\hat{\mu}(t)$ lungo tale realizzazione si ottiene:

$$\hat{\mu}(0) = 0; \quad \hat{\mu}(1) = 0; \quad \hat{\mu}(2) = \frac{1}{3}; \quad \hat{\mu}(3) = \frac{2}{4}; \quad \cdots; \quad \hat{\mu}(k) = \frac{k-1}{k+1}; \quad \cdots$$

e dunque per tale realizzazione vale $\lim_{t\to\infty} \hat{\mu}(t) = 1$.

Generalizzando, poiché non appena esce croce la moneta non verrà più lanciata è facile capire che vale

$$\mathop{plim}_{t\to\infty} \hat{\mu}(t) = 1 = \lim_{t\to\infty} \mu_X(t)$$

e dunque tale processo è ergodico. ■

La proprietà di ergodicità dunque ci consente, tra l'altro, di ricavare il valore atteso di una distribuzione (supposto ignoto) semplicemente osservando una realizzazione.

Esempio 5 Si ha il sospetto che un arbitro di calcio usi una moneta truccata per far scegliere il campo alle squadre, ovvero si ritiene che la probabilità che esca testa sia $1 - a < 1/2$ e che quella che esca croce sia $a > 1/2$. Si desidera valutare quanto vale a.

Possiamo considerare il processo stocastico dell'Esempio 1 usando tale moneta. Il valore atteso della generica variabile aleatoria vale $\mu_X = a$.

Sappiamo che tale processo è ergodico, a prescindere dal valore di a. Dunque possiamo osservare una generica realizzazione $x(\cdot)$ e calcolare la sua media temporale $\hat{\mu}(t)$ che per $t \to \infty$ converge a valore μ_X che si desidera determinare. ■