

Automazione Industriale

Prima Prova Scritta - 20 Aprile 2007

Testo B

Si svolgano, senza consultare appunti e senza usare la calcolatrice, i seguenti esercizi.

Esercizio 1. (7 punti) Si hanno due dadi. Il dado D_1 ha tre facce col numero 0; una faccia col numero 1, due facce col numero 2. Il dado D_2 ha due facce col numero 0; tre facce col numero 1, una faccia col numero 2.

- (a) **(2 punti)** Si lancia il dado D_1 e sia X_1 il numero ottenuto. Determinare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X_1 tracciandone l'istogramma. Calcolare il valore atteso $E[X_1]$ e la varianza $var[X_1]$ usando la funzione generatrice di probabilità.
- (b) **(2 punti)** Si lancia il dado D_2 e sia X_2 il numero ottenuto. Determinare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X_2 tracciandone l'istogramma. Calcolare il valore atteso $E[X_2]$ e la varianza $var[X_2]$ usando le formule che definiscono tali momenti.
- (c) **(3 punti)** Si lanciano i due dadi contemporaneamente e sia $X = X_1 - X_2$ la differenza tra i due numeri ottenuti. Calcolare il valore atteso di questa nuova variabile casuale e si valuti se vale $E[X] = E[X_1] - E[X_2]$.

Esercizio 2. (8 punti) Si consideri l'automa $G = (X, E, \delta, x_0)$ con $X = \{x_0, x_1, x_2\}$, $E = \{a, b, c\}$ e funzione di transizione data dalla seguente tabella:

δ	a	b	c
x_0	x_1	x_2	—
x_1	—	x_0	—
x_2	—	—	x_0

A tale automa è associata la struttura di temporizzazione $\Theta = \{\theta_a, \theta_b, \theta_c\}$ con

$$\theta_a = \{2, 2, 2, 2, 2, \dots\}, \quad \theta_b = \{1, 3, 1, 3, 1, 3, \dots\}, \quad \theta_c = \{1, 1, 1, 1, 1, \dots\}.$$

- (a) **(2 punti)** Si determini la struttura grafica di tale automa.
- (b) **(2 punti)** Si determini l'evoluzione di tale automa nelle prime 10 unità di tempo supponendo una politica di memoria di abilitazione.
- (c) **(2 punti)** Si determini l'evoluzione di tale automa nelle prime 10 unità di tempo supponendo una politica di memoria totale.
- (d) **(2 punti)** Si determini per ognuna delle due politiche qual è la probabilità che l'automa si trovi nello stato x_1 e qual è la frequenza con cui si verifica l'evento a (supposta ogni unità di tempo pari a 1 s).

Esercizio 3. (7 punti) Un studio epidemiologico ha rivelato che una provincia italiana è infestata da un parassita che può trasmettere all'uomo una malattia.

Un abitante della provincia può trovarsi in uno dei seguenti tre stati: immunizzato (I), malato (M) o neutro (N). Da un mese all'altro il suo stato può cambiare secondo le regole seguenti. Se è immunizzato può restare tale con probabilità 0.8 o diventare neutro con probabilità 0.2. Se è malato può restare tale con probabilità 0.1 o divenire immune con probabilità 0.9. Se è neutro può restare tale con probabilità 0.5 o ammalarsi con probabilità 0.5.

- (a) **(2 punti)** Si descriva tale processo mediante una catena di Markov a tempo discreto dandone la rappresentazione grafica.
- (b) **(2 punti)** Si determini la probabilità che un individuo inizialmente neutro si trovi in ciascuno dei tre stati dopo 3 mesi.
- (c) **(3 punti)** Si desidera valutare la percentuale degli individui malati sulla popolazione totale. Si discuta se il modello consente di determinare tale valore e sotto quali ipotesi; in caso affermativo, lo si calcoli.

Esercizio 4. (8+2 punti) Una ditta possiede un apparecchio di stampa fotografica che dispone di un set di tre lampade. Una delle lampade, quella grande, ha tempo di vita esponenziale con vita media pari a 10 giorni; le altre due lampade, piccole, hanno tempo di vita esponenziale con vita media pari a 4 giorni.

Quando il set di lampade viene caricato sull'apparecchio, inizialmente vengono contemporaneamente accese le due lampade piccole e quando entrambe, una dopo l'altra, si saranno guastate viene messa in funzione la lampada grande. Quando la lampada grande si guasta la macchina va in manutenzione. Il tempo di manutenzione, che consiste nella sostituzione del set di lampade, è anche esso esponenziale con durata media pari a 2 giorni.

- (a) **(2 punti)** Si descriva tale processo mediante una catena di Markov a tempo continuo, indicando con μ_g il tasso di rottura della lampada grande, con μ_p il tasso di rottura della lampada piccola e con λ il tasso di manutenzione.
- (b) **(2 punti)** Si discuta se tale sistema è ergodico e si valuti la percentuale del tempo in cui il sistema si trova in *funzionamento completo* (lampada grande o entrambe le lampade piccole accese), in *funzionamento ridotto* (solo una lampada piccola accesa) o in *manutenzione*.
- (c) **(2 punti)** Tenendo presente che un set di lampade costa 1800 Euro (1000 Euro per la lampada grande, e 400 Euro per ogni lampada piccola) e che per ogni ora in cui la macchina non lavora si perdono 252 Euro, si valuti il costo giornaliero della ditta per ricambi e per mancata lavorazione.
- (d) **(2 punti)** La lampada grande assorbe 1.8kw e ogni lampada piccola assorbe 1.2 kw. Si determini il consumo medio giornaliero di energia elettrica (in kwh).
- (e) **(bonus 2 punti)** Viene proposto alla ditta di acquistare un nuovo tipo di set in cui la lampada grande, realizzata con una nuova tecnologia, ha costo pari a 2000 Euro e vita media di 20 giorni mentre le lampade piccole non cambiano. Si valuti se alla ditta convenga passare alla nuova tecnologia.