

Automazione Industriale

Prima Prova Scritta - 20 Aprile 2007

Testo A

Si svolgano, senza consultare appunti e senza usare la calcolatrice, i seguenti esercizi.

Esercizio 1. (7 punti) Si hanno due dadi. Il dado D_1 ha una faccia col numero 0; tre facce col numero 1, due facce col numero 2. Il dado D_2 ha tre facce col numero 0; due facce col numero 1, una faccia col numero 2.

- (a) **(2 punti)** Si lancia il dado D_1 e sia X_1 il numero ottenuto. Determinare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X_1 tracciandone l'istogramma. Calcolare il valore atteso $E[X_1]$ e la varianza $var[X_1]$ usando le formule che definiscono tali momenti.
- (b) **(2 punti)** Si lancia il dado D_2 e sia X_2 il numero ottenuto. Determinare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X_2 tracciandone l'istogramma. Calcolare il valore atteso $E[X_2]$ e la varianza $var[X_2]$ usando la funzione generatrice di probabilità.
- (c) **(3 punti)** Si lanciano i due dadi contemporaneamente e sia $X = X_1 \cdot X_2$ il prodotto dei due numeri ottenuti. Calcolare il valore atteso di questa nuova variabile casuale e si valuti se vale $E[X] = E[X_1] \cdot E[X_2]$.

Esercizio 2. (8 punti) Si consideri l'automa $G = (X, E, \delta, x_0)$ con $X = \{x_0, x_1, x_2\}$, $E = \{a, b, c\}$, e funzione di transizione data dalla seguente tabella:

δ	a	b	c
x_0	x_1	—	x_2
x_1	—	x_0	—
x_2	x_0	—	—

A tale automa è associata la struttura di temporizzazione $\Theta = \{\theta_a, \theta_b, \theta_c\}$ con

$$\theta_a = \{1, 3, 1, 3, 1, 3, \dots\}, \quad \theta_b = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}, \quad \theta_c = \{2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots\}.$$

- (a) **(2 punti)** Si determini la struttura grafica di tale automa.
- (b) **(2 punti)** Si determini l'evoluzione di tale automa nelle prime 10 unità di tempo supponendo una politica di memoria di abilitazione.
- (c) **(2 punti)** Si determini l'evoluzione di tale automa nelle prime 10 unità di tempo supponendo una politica di memoria totale.
- (d) **(2 punti)** Si determini per ognuna delle due politiche qual è la probabilità che l'automa si trovi nello stato x_0 e qual è la frequenza con cui si verifica l'evento a (supposta ogni unità di tempo pari a 1 s).

Esercizio 3. (7 punti) Un studio epidemiologico ha rivelato che una provincia italiana è infestata da un parassita che può trasmettere all'uomo una malattia.

Un abitante della provincia può trovarsi in uno dei seguenti tre stati: immunizzato (I), malato (M) o neutro (N). Da un mese all'altro il suo stato può cambiare secondo le regole seguenti. Se è immunizzato può restare tale con probabilità 0.9 o diventare neutro con probabilità 0.1. Se è malato può restare tale con probabilità 0.2 o divenire immune con probabilità 0.8. Se è neutro può restare tale con probabilità 0.5 o ammalarsi con probabilità 0.5.

- (a) **(2 punti)** Si descriva tale processo mediante una catena di Markov a tempo discreto dandone la rappresentazione grafica.
- (b) **(2 punti)** Si determini la probabilità che un individuo inizialmente immune si trovi in ciascuno dei tre stati dopo 3 mesi.
- (c) **(3 punti)** Si desidera valutare la percentuale degli individui malati sulla popolazione totale. Si discuta se il modello consente di determinare tale valore e sotto quali ipotesi; in caso affermativo, lo si calcoli.

Esercizio 4. (8+2 punti) Una ditta possiede un apparecchio di stampa fotografica che dispone di un set di tre lampade. Una delle lampade, quella grande, ha tempo di vita esponenziale con vita media pari a 10 giorni; le altre due lampade, piccole, hanno tempo di vita esponenziale con vita media pari a 4 giorni.

Quando il set di lampade viene caricato sull'apparecchio, inizialmente viene messa in funzione solo la lampada grande. Quando essa si guasta vengono contemporaneamente accese le due lampade piccole e quando entrambe, una dopo l'altra, si saranno guastate la macchina va in manutenzione. Il tempo di manutenzione, che consiste nella sostituzione del set di lampade, è anche esso esponenziale con durata media pari a 2 giorni.

- (a) **(2 punti)** Si descriva tale processo mediante una catena di Markov a tempo continuo, indicando con μ_g il tasso di rottura della lampada grande, con μ_p il tasso di rottura della lampada piccola e con λ il tasso di manutenzione.
- (b) **(2 punti)** Si discuta se tale sistema è ergodico e si valuti la percentuale del tempo in cui il sistema si trova in *funzionamento completo* (lampada grande o entrambe le lampade piccole accese), in *funzionamento ridotto* (solo una lampada piccola accesa) o in *manutenzione*.
- (c) **(2 punti)** Tenendo presente che un set di lampade costa 900 Euro (500 Euro per la lampada grande, e 200 Euro per ogni lampada piccola) e che per ogni ora in cui la macchina non lavora si perdono 126 Euro, si valuti il costo giornaliero della ditta per ricambi e per mancata lavorazione.
- (d) **(2 punti)** La lampada grande assorbe 0.9kw e ogni lampada piccola assorbe 0.6 kw. Si determini il consumo medio giornaliero di energia elettrica (in kwh).
- (e) **(bonus 2 punti)** Viene proposto alla ditta di acquistare un nuovo tipo di set in cui la lampada grande, realizzata con una nuova tecnologia, ha costo pari a 1000 Euro e vita media di 20 giorni mentre le lampade piccole non cambiano. Si valuti se alla ditta convenga passare alla nuova tecnologia.