

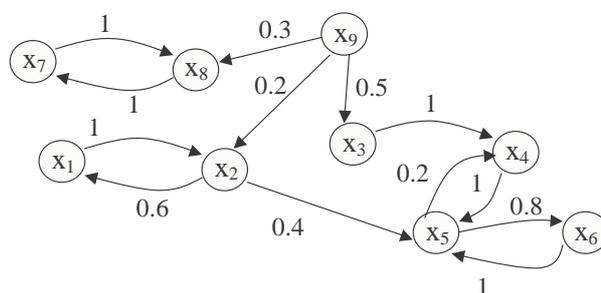
Automazione Industriale

Esame del 28 Settembre 2007

Esercizio 1 (6 punti). Si consideri il seguente processo stocastico. Si lancia un dado all'istante di tempo $\tau = 0$. Per ogni valore di $\tau \geq 0$, se esce un numero *diverso da 3 o da 4* il dado viene rilanciato all'istante $\tau + 1$; se esce un numero *pari a 3 o a 4* all'istante τ il dado viene lasciato per sempre nella stessa posizione.

- (2 punti) Si calcoli la probabilità di avere il generico numero i al tempo τ , per $i = 1, \dots, 6$.
- (2 punti) Si calcoli la media $\mu_X(\tau)$ e si discuta se tale processo sia stazionario nella media.
- (2 punti) Si calcoli $\mu_X(\infty)$ e si dia una interpretazione fisica di tale prevedibile valore.

Esercizio 2 (7 punti). Si consideri la catena di Markov a tempo discreto in figura.



- (2 punti) Si individuino le componenti fortemente connesse e si stabilisca quali tra queste sono transienti e quali ergodiche.
- (2 punti) Si specifichi se le eventuali componenti ergodiche sono periodiche o aperiodiche (nel primo caso si indichi anche quanto vale il periodo).
- (2 punti) Si determini se tale CMTD è ergodica, motivandone il risultato.
- (1 punto) Si discuta se sia possibile modificare la proprietà di ergodicità di tale rete cambiando il verso di un solo arco.

Esercizio 3 (17 punti). Si risponda alle seguenti domande in modo chiaro ed esauriente.

- (3 punti) Si definisca una rete di Petri temporizzata.
- (3 punti) Si definisca formalmente il grado di abilitazione di una transizione fornendo anche qualche semplice esempio che chiarisca la definizione.
- (3 punti) Si spieghi come sia possibile ottenere, data una rete di Petri in cui ogni transizione ha infiniti serventi, una rete equivalente in cui ogni transizione ha due serventi.
- (3 punti) Si dimostri che in una coda ergodica M/M/1 con intensità di traffico $\rho = \lambda/\mu$ la probabilità di stato a regime vale:

$$\pi_i = (1 - \rho)\rho^i \quad \text{per } i \in \mathbb{N}.$$

- (5 punti) Si consideri una rete di code chiusa costituita da tre risorse. Le prime due risorse, con tasso di servizio μ_1 e μ_2 , sono di tipo M/M/1 mentre l'ultima, con tasso di servizio μ_3 , è di tipo M/M/2. La matrice di routing vale:

$$R = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 - a \\ 0 & b & 1 - b \\ 1 - c & c & 0 \end{bmatrix}.$$

Si rappresenti la catena di Markov a tempo continuo ad essa equivalente nell'ipotesi che all'interno della rete vi siano 2 utenti.