

Nota sull'integrazione numerica di equazioni differenziali

A. Giua

DIEE, Università di Cagliari, giua@unica.it

versione 7 maggio 2020

1 Integrazione di equazioni differenziali

La parte più complessa nella simulazione di un automa ibrido consiste nel determinare l'evoluzione continua, descritta da una equazione differenziale.

La soluzione di una equazione differenziale lineare può essere agevolmente determinata con metodi analitici. Nel dominio del tempo è possibile calcolare l'integrale dell'omogenea e l'integrale di Duhamel per sistemi descritti da un modello ingresso-uscita, o calcolare la matrice di transizione dello stato e applicare la formula di Lagrange per modelli in variabili di stato. Anche le trasformate di Laplace consentono in maniera agevole di risolvere tali problema.

Tuttavia, nel caso di equazioni differenziali non lineari non esiste una tecnica analitica generale per l'integrazione ed è possibile risolvere in forma chiusa solo casi particolarmente semplici. Esiste tuttavia una tecnica generale che si basa sulla risoluzione numerica. In questa sezione si danno alcuni cenni sulle tecniche che possono usarsi in tale ambito.

Faremo riferimento ad un modello autonomo del tipo

$$\dot{x}(t) = f(x)$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$ è un vettore a n componenti. La soluzione di tale equazione per $t \geq 0$ a partire da una condizione iniziale assegnata $x(0)$ assume la forma

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(\tau))d\tau, \quad (1)$$

e dunque richiede di calcolare l'integrale della funzione $f(x(t))$. Si noti che in genere tale integrale non può essere risolto in forma analitica perché l'integrando dipende dalla variabile $x(t)$ che è incognita.

Esempio 1. Si consideri una funzione di attività $f(x) = x^2$ che da luogo alla seguente l'eq. differenziale¹

$$\dot{x}(t) = x^2(t).$$

Data un condizione iniziale arbitraria $x(0) \in \mathbb{R}$ la soluzione prende la forma:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x^2(\tau) d\tau$$

che ovviamente per poter essere calcolata analiticamente richiederebbe di conoscere l'espressione della variabile incognita $x(t)$. \diamond

E' tuttavia possibile determinare agevolmente una soluzione della eq. (1) tramite metodi di integrazione numerica.

2 Formule di quadratura

I metodi di integrazione numerica prevedono di campionare la variabile indipendente t con un passo di integrazione Δ e di approssimare in ogni passo il valore della funzione integranda per poter agevolmente calcolare in modo approssimato l'integrale. I vari algoritmi usati a questo scopo sono anche detti *formule di quadratura* (o di integrazione numerica).

Scelto un passo di integrazione $\Delta > 0$, la variabile t assume valori $0, \Delta, 2\Delta, \dots$. Detto $x_k = x(k\Delta)$, dalla (1) vale

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \int_0^\Delta f(x(\tau)) d\tau \\ x_2 &= x_0 + \int_0^{2\Delta} f(x(\tau)) d\tau = x_0 + \int_0^\Delta f(x(\tau)) d\tau + \int_\Delta^{2\Delta} f(x(\tau)) d\tau \\ &= x_1 + \int_\Delta^{2\Delta} f(x(\tau)) d\tau \\ &\vdots \end{aligned}$$

da cui si ricava la generica relazione

$$x_{k+1} = x_k + \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} f(x(\tau)) d\tau \quad (2)$$

Presentiamo ora a titolo esemplificativo due classici metodi di integrazione numerica.

¹Questa equazione differenziale, solo apparentemente semplice, sarà discussa in dettaglio nel seguito, quando studieremo la nozione di *globalità* di una soluzione.

2.1 Metodo di Eulero

Il metodo di Eulero suppone che il passo di integrazione in (2) sia sufficientemente piccolo da poter considerare che nell'intervallo $[k\Delta, (k + 1)\Delta]$ la funzione $f(x(\tau)) = f(x_k)$ sia costante. Possiamo dunque riscrivere la (2)

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k)\Delta. \quad (3)$$

Applicando tale relazione in modo ricorsivo è possibile determinare successivamente x_1, x_2, \dots

Nel metodo di Eulero la $x(t)$ cresce linearmente in ogni intervallo: approssimazioni di questo tipo sono dette del primo ordine.

2.2 Metodo di Runge-Kutta

Esiste una famiglia di metodi di integrazione detti di Runge-Kutta. Qui viene presentato il più semplice detto metodo di Runge-Kutta del secondo ordine ad un passo. Questo metodo è simile al metodo di Eulero ma prevede di approssimare in (2) la funzione $f(x(\tau))$ nell'intervallo $[k\Delta, (k + 1)\Delta]$ con il valore che essa assume nel punto centrale dell'intervallo, ovvero

$$f(x(\tau)) = f(x((k + 0.5)\Delta)) = f(\hat{x}_k),$$

dove si denota \hat{x}_k il valore assunto dalla $x(\tau)$ nel punto centrale dell'intervallo $[k\Delta, (k + 1)\Delta]$. Tuttavia quando si calcola la (2) solo il valore iniziale $x_k = x(k\Delta)$ è noto e dunque occorre applicare un algoritmo che prevede più passi.

1. Supponendo di applicare a partire da x_k dapprima il metodo di Eulero si può determinare una prima stima del valore del segnale all'istante $k + 1$:

$$x'_{k+1} = x_k + f(x_k)\Delta.$$

2. Si stima il valore \hat{x}_k assunto dalla $x(\tau)$ nel punto centrale dell'intervallo $[k\Delta, (k + 1)\Delta]$ mediante interpolazione. Tale valore coincide con la media fra x_k e x'_{k+1} , ovvero:

$$\hat{x}_k = \frac{x_k + x'_{k+1}}{2} = x_k + 0.5f(x_k)\Delta.$$

3. Calcolando il valore della attività in questo punto centrale, si determina il valore corretto del segnale all'istante $k + 1$:

$$x_{k+1} = x_k + f(\hat{x}_k)\Delta.$$

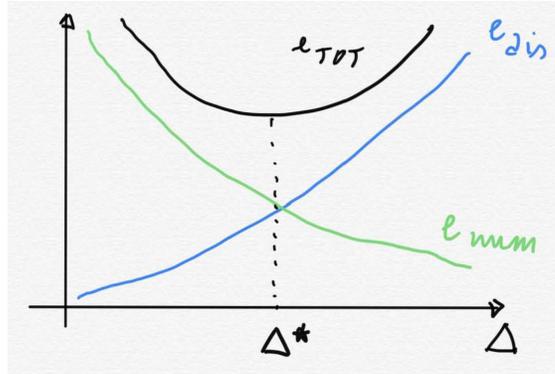


Figure 1: Errori di integrazione numerica in funzione del passo di integrazione Δ : errore di discretizzazione e_{dis} ed errore numerico e_{num} .

3 Errore di integrazione

Si noti che tutte le procedure di integrazione numerica sono affette da due tipi di errore come mostrato in figura 1.

- Un errore di *discretizzazione* e_{dis} dovuto all'approssimazione del primo ordine di $f(x(\tau))$ con una funzione costante. Tale errore cresce al crescere del passo di integrazione Δ e, viceversa, tende a 0 per Δ che tende a zero.
- Un errore *numerico* e_{num} dovuto alla precisione finita del calcolatore. In questo caso per determinare $x(t) = x(k\Delta)$ sono necessari t/Δ passi e l'errore numerico cresce al numero dei passi. Dunque tale errore diminuisce al crescere del passo di integrazione Δ e, viceversa, tende a $+\infty$ per Δ che tende a zero.

È dunque necessario trovare il valore Δ^* opportuno, che realizzi il miglior compromesso tra le contrastanti esigenze di ridurre i due tipi di errori.

Si noti, infine, che i programmi di integrazione numerica usano spesso un *passo di integrazione variabile* al fine ridurre l'errore totale. Ad esempio, quando il valore attuale della $x(\tau)$ cade in un intervallo in cui la $f(x)$ può con buona approssimazione ritenersi costante, anche un grande passo di integrazione non introduce un significativo errore di discretizzazione e permette invece di ridurre l'errore numerico. Viceversa, quando il valore attuale della $x(\tau)$ cade in un intervallo in cui la $f(x)$ varia sensibilmente è necessario un passo in integrazione piccolo per limitare l'errore di discretizzazione.