



**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI CAGLIARI**  
*FACOLTA' DI INGEGNERIA*  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRONICA

**Il Metodo degli Elementi Spettrali**  
*Least Square*  
**per il**  
**Trattamento di Problemi**  
**Elettromagnetici**

*Dott. Carlo PITZIANI*

TESI DI DOTTORATO DI RICERCA IN  
INGEGNERIA ELETTRONICA ED INFORMATICA

---

**XVI CICLO**



*Dedico questa tesi a..*

*Emanuela, stupenda donna e splendida compagna, che tanto amore gioia e serenità mi ha regalato da quando ho avuto la fortuna di conoscerla,*

*Franco, Licia e Rossella, la mia famiglia, due tesi sono tante lo so, grazie per il sostegno e l'incoraggiamento che mi avete dato in questi anni,*

*Alberto, Alessandro, Stefano e Valentina, AMICI, con la A maiuscola, che hanno condiviso con me tante emozioni, belle e meno belle in questi anni.*

*Carlo*



# Ringraziamenti

Desidero ringraziare innanzitutto il professor Giuseppe Mazzarella per la fiducia accordatami dandomi la possibilità di fare questo dottorato di ricerca e per i preziosi consigli, non solo tecnici, che mi ha fornito in questi tre anni.

Ringrazio il dott. Giorgio Fotia che mi ha permesso di svolgere parte del dottorato al CRS4 e i cui consigli sono stati e saranno fondamentali per la mia carriera futura.

Un ulteriore ringraziamento va al dott. Fabio Maggio che ha seguito questo lavoro durante la mia permanenza al CRS4.

Ringrazio inoltre gli amici conosciuti al CRS4: Alessandro, Anna, Marco “Bron-to”, Claudio, Erminia, Fabrizio, Felice, Francesca, Gabriella, Gregorio, Katia, Mirrella, Piero, con i quali ho trascorso bellissimi momenti e innumerevoli allegri pranzetti.

Desidero inoltre ringraziare i colleghi del CRS4 e del DIEE con cui ho collaborato in questi anni e da cui ho imparato tanto: Andrea, Giuliana, Luca, Luisa e Michela.

Carlo



# **Il Metodo degli Elementi Spettrali Least Square per il Trattamento di Problemi Elettromagnetici**

**Dott. Carlo Pitzianti**

TESI DI DOTTORATO DI RICERCA IN  
INGEGNERIA ELETTRONICA ED INFORMATICA

XVI Ciclo

## **Sommario**

In questa tesi noi proponiamo un solutore ad elevata accuratezza per le equazioni di Maxwell del primo ordine nel dominio della frequenza, basato sulla combinazione del metodo degli elementi spettrali (SEM) con un approccio *least square*.

L'approccio *least squares* evita che nelle soluzioni compaiano modi spuri presenti nel classico approccio agli elementi finiti. Esistono diversi esempi di queste soluzioni non fisiche in letteratura, e l'eliminazione degli effetti spuri è un soggetto di grande interesse.

Il metodo degli elementi spettrali è una tecnica numerica per la soluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE), che viene largamente utilizzata nel campo della fluido dinamica computazionale e della meccanica dei solidi.

E' nostra opinione che questo approccio possa essere usato con successo nel trattamento di problemi elettromagnetici in cui il dominio computazionale è grande rispetto alla lunghezza d'onda utilizzata.



# Indice

<b>Ringraziamenti</b>	<b>v</b>
<b>Sommario</b>	<b>vii</b>
<b>Indice</b>	<b>9</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>13</b>
1.1 Modelli numerici . . . . .	13
1.2 Scopo del lavoro . . . . .	14
<b>2 Fondamenti Matematici</b>	<b>19</b>
2.1 Polinomi e approssimazioni di funzioni . . . . .	19
2.1.1 Interpolazione . . . . .	19
2.1.2 La formula di interpolazione di Lagrange . . . . .	20
2.1.3 Polinomi Ortogonali . . . . .	21
2.1.4 Polinomi di Legendre . . . . .	22
2.2 Integrazione e differenziazione . . . . .	23
<b>3 Elementi Finiti</b>	<b>29</b>
3.1 Introduzione . . . . .	29
3.2 Spazi vettoriali . . . . .	31
3.3 Gradi di libertà e Funzioni di Forma . . . . .	31
3.3.1 Elementi finiti triangolari . . . . .	32
3.3.2 Elementi finiti a forma di parallelepipedo . . . . .	32

3.4	Esempio: equazione di Helmholtz scalare . . . . .	33
3.4.1	Forma debole del problema . . . . .	33
3.4.2	Caso elementi triangolari . . . . .	34
3.4.3	Convergenza della soluzione . . . . .	35
3.4.4	Operatori differenziali discretizzati . . . . .	36
3.4.5	Matrice di Stiffness . . . . .	38
3.4.6	Matrice di massa . . . . .	42
3.4.7	Vettore dei termini noti . . . . .	42
3.4.8	Il problema della validazione dei risultati . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Elementi spettrali</b>	<b>45</b>
4.1	Uso degli elementi spettrali . . . . .	45
4.2	La discretizzazione basata sugli elementi spettrali . . . . .	48
4.3	Uso degli elementi spettrali . . . . .	52
4.3.1	Matrice di Stiffness . . . . .	57
4.3.2	Matrice di Massa . . . . .	63
4.3.3	Vettore dei Termini Noti . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Il Problema delle Soluzioni Spurie</b>	<b>65</b>
5.1	I modi spuri . . . . .	65
5.2	Il nostro approccio al problema . . . . .	69
<b>6</b>	<b>LSSEM: Caso Statico</b>	<b>71</b>
6.1	Problema div-curl . . . . .	71
6.2	Validazione dei risultati . . . . .	74
6.2.1	Soluzione Analitica Per il Problema DivCurl . . . . .	74
6.2.2	Confronto tra LSFEM e LSSEM . . . . .	76
<b>7</b>	<b>LSSEM : Equazioni di Maxwell</b>	<b>79</b>
7.1	Caso elettromagnetico: problema accoppiato . . . . .	79
7.2	Validazione dei risultati . . . . .	88
7.2.1	Soluzione Analitica Maxwell TE . . . . .	88
7.2.2	Grafici . . . . .	91

---

<b>8 Applicazioni</b>	<b>93</b>
8.1 Calcolo dei parametri S . . . . .	93
8.2 Ricerca del modo fondamentale . . . . .	95
8.3 Giunzione a T . . . . .	98
<b>9 Conclusioni</b>	<b>103</b>
9.1 Risultati raggiunti . . . . .	103
9.2 Sviluppi futuri . . . . .	105
<b>A LSSEM Caso Statico</b>	<b>107</b>
<b>Lista delle Figure</b>	<b>129</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>131</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

---

*In questo capitolo introdurremo brevemente il problema che siamo proposti di risolvere, e individueremo le scelte che abbiamo fatto nel corso della tesi. La motivazione di tali scelte sarà sviluppata nei capitoli successivi.*

### 1.1 Modelli numerici

Negli ultimi anni la modellazione numerica si è conquistata un importante ruolo nel mercato ingegneristico. La richiesta del mercato a nuovi prodotti, con nuove caratteristiche, cresce ad un ritmo decisamente maggiore rispetto ai decenni passati. Questo comporta la necessità di avere tempi di progettazione più brevi a causa di un *time to market* decisamente più basso rispetto al passato. A causa di questo si ha la necessità di rendere la fase prototipale dei progetti, solitamente lunga e costosa, la più breve possibile, ed è a questo punto che interviene la simulazione numerica che si pone come tramite tra la fase progettazione e quella di prototipazione: una fase in cui si possono rivedere e ottimizzare i parametri fondamentali del progetto per poi giungere ad una fase di prototipo che sia di presviluppo. Il tutto decisamente a costi più bassi che non in passato. Ed è qui che i solutori numerici dimostrano la loro forza: problemi di diversa natura fisica, governati da diverse equazioni differenziali, richiedono solutori preparati ad hoc, e man mano che la complessità del problema cresce, cresce anche la necessità di avere solutori veloci e poco onerosi dal punto di vista computazionale. In questa tesi ci occuperemo del problema della simulazione di fenomeni elettromagnetici, problema che abbiamo risolto con l'introduzione, in campo elettromagnetico, di un nuovo metodo numerico, il *Least square spectral element method*, che descriveremo nei particolari nel corso della tesi.

## 1.2 Scopo del lavoro

L'evoluzione dei metodi numerici per problemi elettromagnetici ha seguito strettamente l'incremento in velocità e l'aumento di memoria dei computer. Partendo dalle tecniche variazionali degli anni 50, l'attenzione dei ricercatori si è mossa successivamente attorno al metodo dei momenti (MOM). Nei decenni seguenti i solutori basati sul MOM (per approfondimenti si veda [14]) hanno fornito un buon tasso di convergenza con ridotti tempi computazionali; il suo grosso problema è che esso è vincolato dal dominio in cui si lavora; nel caso generale infatti uno ha bisogno di implementare solutori ad hoc per domini con diverse geometrie. Per geometrie semplici, i solutori basati sul metodo dei momenti usano funzioni di base a dominio intero e hanno un utile vantaggio: essi generalmente permettono con un basso costo computazionale di avere sia una soluzione numerica accurata sia una buona comprensione fisica della soluzione. Per questa ragione questi metodi possono essere attualmente classificati come semi-analitici, come quelli variazionali. Purtroppo questo vantaggio non si estende alle geometrie complesse che richiedono funzioni di base a dominio locale; dato che generalmente il progetto di solutori MOM viene richiesto anche per queste applicazioni, sono stati sviluppati approcci diversi. Tra i vari quelli basati su metodi di griglia, il cui sviluppo è stato ancora più vincolato alla velocità dei computer. Uno dei metodi di griglia più popolari nell'elettromagnetismo computazionale è il metodo delle differenze finite, grazie al fatto che i solutori sono facili da implementare; essi per non rispondono all'esigenza di trattare problemi il cui dominio sia geometricamente ed elettromagneticamente complesso. Attualmente i più efficaci solutori per le equazioni di Maxwell sono solitamente basati su elementi finiti, su cui infatti abbiamo focalizzato la nostra attenzione. Le principali caratteristiche del FEM sono:

- permettono di trattare i problemi con geometria complessa,
- versatilità
- indipendenza dal dominio del problema,
- sono capaci di trattare con successo domini altamente irregolari.

Un solutore basato sugli elementi finiti può agire indifferentemente per problemi di propagazione guidata, e di propagazione libera, è sufficiente infatti cambiare solo le condizioni al contorno del problema e definire i diversi mezzi presenti nel dominio. Tra gli svantaggi dei metodi di griglia dobbiamo considerare la grande occupazione di memoria che questi metodi richiedono.

Nel caso dell'equazione di Maxwell con dominio 3D, abbiamo ad esempio 12 gradi di libertà per ogni nodo, considerando che ci occorrono almeno una decina di grid point (punti di griglia) per lunghezza d'onda abbiamo a che fare con problemi dell'ordine delle centinaia di Mb. A causa di questo fatto generalmente vengono richiesti elaboratori di grande potenza.

Sono state sviluppate due formulazioni degli elementi finiti per l'elettromagnetismo:

- l'approccio agli elementi di bordo (o elementi di Nedgelec)
- l'approccio agli elementi nodali.

I primi prendono il loro nome dal fatto che i gradi di libertà vengono scelti nei bordi dell'elemento, e permettono di rappresentare campi con componente tangente continua, mentre lasciano quella normale senza vincoli. I secondi condividono la classica filosofia degli elementi finiti, quella cioè comunemente utilizzata in meccanica computazionale, con i gradi di libertà posti nei nodi (vertici) degli elementi.

I due metodi presentano significative differenze, entrambi hanno vantaggi e svantaggi. Noi riteniamo che gli elementi nodali godano di un numero di caratteristiche che li rendono molto più adatti per i nostri scopi:

- possono essere applicati altrettanto bene a problemi con condizioni di divergenza non nulla,
- forniscono migliore accuratezza con lo stesso sforzo computazionale o alternativamente forniscono la stessa accuratezza con un costo computazionale ridotto,
- promettono di essere più facilmente adattabili a problemi di grande scala,
- non necessitano di particolari procedure di pre e post-processing, infatti molti programmi di generazione di mesh non generano elementi di Nedgelec,
- gli elementi nodali sono quelli che più direttamente si prestano per l'implementazione del metodo SEM (spectral element method).

Quest'ultimo aspetto è per noi di molto importante visto che siamo interessati proprio al SEM.

Tutti i fenomeni elettromagnetici macroscopici, siano essi problemi statici, armonici o tempo varianti, siano essi propagazione all'interno di strutture guidanti, in

spazio libero o in mezzi non omogenei, sono governati da un set di equazioni differenziali del primo ordine, le equazioni di Maxwell. Noi ci siamo focalizzati sulle equazioni al primo ordine perchè in questa forma risulta particolarmente agevole passare da problemi nel dominio del tempo a quelli nel dominio della frequenza.

Consideriamo la forma classica delle equazioni di Maxwell.

$$\left\{ \begin{array}{llll} \nabla \times \mathbf{H} & = & j\omega \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{J} & \text{in } \Omega & \text{(Legge di Faraday-Neumann)} \\ \nabla \times \mathbf{E} & = & -j\omega \mu \mathbf{H} - \mathbf{M} & \text{in } \Omega & \text{(Legge di Maxwell-Ampere)} \\ \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) & = & \rho_e & \text{in } \Omega & \text{(Legge di Gauss (CE))} \\ \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) & = & \rho_m & \text{in } \Omega & \text{(Legge di Gauss (CM))} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Nel caso nel caso di domini 3D il sistema formato dalle equazioni di Maxwell è composto da 8 equazioni scalari in sole 6 incognite; ci troviamo di fronte ad un sistema che, pur essendo fisicamente un problema ben posto (le equazioni della divergenza risultano fisicamente ridondanti), risulta analiticamente sovradeterminato quindi non risolvibile.

La soluzione che viene comunemente usata consiste nel considerare ridondanti le equazioni della divergenza per i problemi tempo varianti, e quindi risolvere due *curl equations* del primo ordine o un'equazione *curl-curl* del secondo. Questa soluzione può purtroppo portare all'insorgenza di modi spuri.

Un modo spurio, dal punto di vista matematico, è una soluzione che non soddisfa alle equazioni della divergenza, dal punto di vista fisico non coincide con le soluzioni reali di un risuonatore o di una struttura guidante. Può inoltre rendere un modello numerico poco affidabile, infatti non siamo in grado di dire a priori se la soluzione che ci viene fornita è reale o spuria. Questo problema comune agli approcci del primo e secondo ordine, risulta uno dei più grandi limiti degli elementi finiti con il classico approccio nodale.

Per risolvere il problema dei modi spuri noi abbiamo seguito l'approccio suggerito in [8] basato sul metodo dei minimi quadrati. Il punto di partenza di questo approccio è l'inclusione di entrambe le equazioni della divergenza nella discretizzazione delle equazioni di Maxwell. La ridondanza nelle equazioni, contenente importanti informazioni dal punto di vista numerico, è la chiave per evitare modi spuri negli elementi nodali.

Dal punto di vista numerico risolvere i due problemi *div-curl* accoppiati ci garantisce di non ritrovarci con soluzioni spurie, ma rimane il problema iniziale del sistema sovradeterminato. Naturalmente non è possibile risolvere un problema numerico sovradeterminato senza opportuni accorgimenti: la soluzione logica è

quella di adottare un metodo di risoluzione per sistemi sovradeterminati quale il metodo dei minimi quadrati.

Da questo approccio abbiamo un altro utile vantaggio. Mantenendo l'equazione della divergenza si mantiene l'equazione ellittica. E' noto in letteratura che, nel caso (come il nostro) in cui si lavori con metodi di griglia, trattando con equazioni ellittiche si hanno tassi di convergenza migliori rispetto a quelli che si avrebbero lavorando con equazioni non ellittiche.

Includendo le equazioni della divergenza nella nostra formulazione riusciamo a sfruttare la ridondanza fisica delle equazioni per avere unicità analitica, e inoltre, dato che dal punto di vista matematico una soluzione spuria è una soluzione che non soddisfa alle equazioni della divergenza, imponendole nella formulazione iniziale siamo sicuri che esse siano soddisfatte e preveniamo così l'insorgenza delle soluzioni spurie.

Il nostro approccio al problema è dunque questo: risolviamo le equazioni di Maxwell complete, con le equazioni della divergenza, cioè risolviamo due problemi *div-curl* accoppiati. Il vantaggio di questo approccio, come mostrato da [8], consiste nell'assenza di soluzioni spurie. Il nostro scopo, quello di realizzare un solutore general purpose affidabile, risulta così raggiunto. Infatti le equazioni di Maxwell del primo ordine contemplano qualunque problema elettromagnetico, solutore *general purpose*, mentre l'assenza di modi spuri consente di avere un solutore affidabile.

Il nostro lavoro si è focalizzato su di un nuovo approccio di griglia, che ha, a nostro parere, migliori performance rispetto al classico FEM, per la soluzione di equazioni differenziali, capace, in maniera davvero efficace, di lavorare su una larga classe di problemi: il metodo degli elementi spettrali (SEM). Questo metodo, che appartiene alla famiglia dei FEM (può essere considerato una loro sottoclasse) ha recentemente guadagnato la popolarità nel quadro del trattamento dei problemi di fluidodinamica e di acustica, questo specialmente per quanto riguarda le simulazioni in domini di grandi dimensioni (problema comune alle applicazioni elettromagnetiche). Questo approccio è stato esteso ad applicazioni tipiche della meccanica strutturale, quali ad esempio equazioni di Helmholtz e elasticità statica.

Scopo di questa tesi è l'estensione di questa tecnologia ad applicazioni elettromagnetiche con geometria complessa, tramite la creazione di un solutore per uso generale e ad alte performance per le equazioni di Maxwell nel dominio della frequenza. Dal momento che elementi finiti e spettrali condividono la stessa filosofia (il punto di partenza per entrambi è la formulazione debole delle equazioni differenziali) si ha che generalmente gli algoritmi disegnati per gli elementi finiti possono essere riformulati per gli elementi spettrali. Questo è stato confermato da numerose esperienze fatte al CRS4 (Centro Ricerche Sviluppo e Studi Superiori

in Sardegna, centro con cui è stata svolta in collaborazione questa tesi) dal gruppo SSM (Solid and Structural and Mechanics).

Gli elementi spettrali hanno un significativo vantaggio rispetto agli elementi finiti, infatti con essi possiamo far variare durante l'elaborazione il grado dei polinomi continui a tratti usati per approssimare la soluzione numerica e lasciare inalterata la griglia computazionale. Daltra parte gli elementi spettrali, che fanno parte della classe dei *h-p methods*, possono anche giocare su un raffinamento della griglia per aumentare la qualità della soluzione, in analogia con gli elementi finiti. In pratica per portare a convergenza la soluzione noi disponiamo di un grado di libertà in più rispetto ai classici metodi agli elementi finiti (chiamati anche *h methods*). Dal punto di vista pratico queste considerazioni suggeriscono la seguente strategia in due fasi per costruire la discretizzazione spettrale per il dominio:

1. Scegliere il passo di griglia più adatto per descrivere i dettagli geometrici del dominio fisico;
2. fissare il grado spettrale sulla base della frequenza del segnale che si deve propagare nella struttura.

Questo è completamente diverso da ci che si fa con le altre tecniche (FDTD, FIT, FEM) in cui la discretizzazione dipende in maniera sostanziale dalla frequenza. Questa maggiore flessibilità può essere importante ad esempio quando nel dominio da analizzare esistono sia strutture grandi che piccole rispetto alla lunghezza d'onda. Questo comporta un notevole risparmio di tempo e di risorse da parte dell'utente. Tutto questo ovviamente senza nessun tipo di cambiamento nel codice. Questo è il grosso vantaggio dei metodi spettrali. Immaginiamo di avere una geometria molto complessa in cui dobbiamo risolvere un dato problema (diffusione del calore, propagazione elettromagnetica o altro); con un classico FEM noi potremo ad esempio usare un solutore che utilizzi elementi di grado 2 fare la simulazione e valutare i risultati. Se poi noi volessimo una precisione maggiore occorrerebbe cambiare l'ordine del metodo che si sta utilizzando, il che comporta due problemi; il primo consiste nella rigenerazione della mesh che, per geometrie complesse può richiedere notevoli tempi di computazione; il secondo e che generalmente occorre cambiare il solutore.

Come conseguenza gli elementi spettrali hanno il miglior rapporto costi/benefici, in termini di sforzo computazionale e qualità dei risultati, rispetto alle tecniche tradizionali quali elementi finiti. Questo fatto è confermato anche dall'esperienza accumulata nel campo della meccanica computazionale.

Scopo di questa tesi è quello di mostrare che gli stessi vantaggi possono essere raggiunti in termini di applicazioni elettromagnetiche.

# Capitolo 2

## Fondamenti Matematici

---

*In questo capitolo sono descritti i principali strumenti matematici che verranno utilizzati nello sviluppo della tesi. Si parlerà in particolare di interpolazione di funzioni, di integrazione e differenziazione numerica. Particolare enfasi verrà posta nelle definizioni e nella formulazione degli strumenti relativi agli elementi spettrali.*

### 2.1 Polinomi e approssimazioni di funzioni

I metodi numerici per la soluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) partono dall'approssimazione della funzione incognita del problema, che può essere fatta in vari modi. Il metodo degli elementi spettrali, che verrà utilizzato in questa tesi, fa parte della famiglia dei metodi di griglia, una classe importante dei metodi per il trattamento numerico di PDE. Vediamo di seguito brevemente alcuni concetti di base che ci porteranno, nei capitoli seguenti, a definire dapprima il metodo degli elementi finiti e in seguito quello degli elementi spettrali.

#### 2.1.1 Interpolazione

Consideriamo una generica funzione  $\Phi(x; a_0, \dots, a_n)$  che dipende da  $n+1$  parametri. Siamo in presenza di un *problema di interpolazione* per la funzione  $\Phi$  quando i parametri  $a_i$  debbono essere determinati imponendo che per  $n+1$  coppie di numeri, reali o complessi,  $(x_i, f_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$  con  $x_i \neq x_k$  per  $i \neq k$  valga

$$\Phi(x_i; a_0, \dots, a_n) = f_i, \quad i = 0, \dots, n \quad (2.1)$$

Le coppie  $(x_i, f_i)$  si chiamano *punti base*.

Un particolare problema di interpolazione, il *problema di interpolazione lineare*, si ha quando  $\Phi$  dipende linearmente dai parametri  $a_i$ :

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n) \equiv a_0\Phi_0(x) + a_1\Phi_1(x) + \dots + a_n\Phi_n(x) \quad (2.2)$$

A questa classe di problemi appartiene l'interpolazione mediante polinomi:

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n) \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (2.3)$$

che viene utilizzato nello sviluppo della teoria degli elementi spettrali. Nel seguito verranno descritte alcune tecniche di interpolazione che verranno utilizzate nello sviluppo della tesi.

### 2.1.2 La formula di interpolazione di Lagrange

Consideriamo adesso una delle più importanti fra le formule di interpolazione, quella di Lagrange. Indichiamo con  $\Pi_n$  l'insieme di tutti i polinomi reali o complessi di una variabile di grado  $\leq n$ , indicati genericamente come

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (2.4)$$

I polinomi interpolanti godono di particolari proprietà essi esistono sempre, cioè è sempre possibile trovare un polinomio interpolante per una funzione (a patto che sia sufficientemente regolare). Inoltre sono unici, infatti per la stessa serie di punti base esiste un solo polinomio interpolante. Diamo una formulazione più rigorosa:

*Dati  $n+1$  punti di base presi ad arbitrio  $(x_i, f_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$  con  $x_i \neq x_k$  per  $i \neq k$  esiste uno ed un solo polinomio  $P \in \Pi_n$  tale che*

$$P(x_i) = f_i \text{ per } i = 0, 1, \dots, n \quad (2.5)$$

Vediamo ora il polinomio interpolatore di Lagrange. Indichiamo con  $\Psi_i(x)$  tali polinomi, essi godono della seguente fondamentale proprietà

$$\Psi_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{per } i = k \\ 0 & \text{per } i \neq k \end{cases} \quad (2.6)$$

il polinomio di Lagrange di grado  $n$  può essere scritto, a meno di una costante moltiplicativa:

$$\begin{aligned} \Psi_i(x) &\equiv \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \equiv \\ &\equiv \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}, \quad \text{con } \omega(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i) \end{aligned} \quad (2.7)$$

L'interpolazione  $P(x)$  della funzione  $f(x)$  attraverso i polinomi di Lagrange di grado  $n$  definiti su  $x_0, \dots, x_n$ , si scrive:

$$P(x) \equiv \sum_{i=0}^n f_i \Psi_i(x) = \sum_{i=0}^n f_i \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x-x_k}{x_i-x_k} \quad (2.8)$$

La (2.8) è la formula di interpolazione di Lagrange per  $f(x)$ ; come si vede  $P(x)$  dipende linearmente dai valori base; per questo motivo questa classe di problemi può essere ricondotta a quelli di interpolazione lineare.

### 2.1.3 Polinomi Ortogonali

Una classe di polinomi largamente utilizzata nelle formule di interpolazione per polinomi è la classe dei polinomi ortogonali. Consideriamo un sistema di polinomi algebrici (di grado  $k$ ) che indichiamo con  $\{p_k\}_{k=0,1,\dots}$  che appartiene allo spazio  $\Pi_n$ . Dire che i  $\{p_k\}_{k=0,1,\dots}$  sono una famiglia di polinomi mutuamente ortogonali nell'intervallo  $(-1,1)$ , pesati dalla funzione peso  $w$ , equivale a dire che si ha:

$$\int_{-1}^1 p_k(x) p_m(x) w(x) dx = 0 \quad \text{se } m \neq k \quad (2.9)$$

Possiamo definire lo spazio  $L_w^2(-1,1)$  come l'insieme delle funzioni reali  $v$  la cui norma:

$$\|v\|_w = \sqrt{\left( \int_{-1}^1 |v(x)|^2 w(x) dx \right)} \quad (2.10)$$

è limitata. Lo spazio  $L_w^2(-1, 1)$  è dotato del prodotto scalare

$$(u, v)_w = \int_{-1}^1 u(x) v(x) w(x) dx \quad (2.11)$$

Lo spazio  $\{p_k\}$  è uno spazio completo, infatti per ogni  $u \in L_w^2(-1, 1)$

$$\|u - P_N u\|_w \rightarrow 0 \text{ se } N \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

dove con  $P_N u$  si intende la serie troncata di  $u$  di ordine  $N$  (con  $N > 0$ ):

$$P_N u = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k p_k \quad (2.13)$$

in cui il coefficiente  $\hat{u}_k$  è definito come:

$$\hat{u}_k = \frac{1}{\|p_k\|_w^2} \int_{-1}^1 u(x) p_k(x) w(x) dx \quad (2.14)$$

## 2.1.4 Polinomi di Legendre

Consideriamo adesso un particolare polinomio interpolante, *il polinomio interpolante di Legendre*. Partiamo dalla definizione del problema di Sturm-Liouville:

$$\left( (1-x^2) L_k'(x) \right)' + k(k+1) L_k(x) = 0 \quad (2.15)$$

I polinomi di Legendre che indichiamo come  $L_k(x)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , sono le autofunzioni di questo problema.

Si può dimostrare che l'espressione di  $L_k(x)$  è la seguente (normalizzata per semplicità in modo che  $L_k(1) = 1$ ):

$$L_k(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^l \binom{k}{l} \binom{2k-2l}{k} x^{k-2l} \quad (2.16)$$

Dove con  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  indichiamo la parte intera di  $\frac{k}{2}$ ,  $L_k(x)$  è pari se  $k$  è pari e dispari se  $k$  è dispari. Una formula pratica per ricavare i polinomi di Legendre dell'ordine desiderato è la seguente relazione di ricorrenza:

$$L_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1}x L_k(x) - \frac{k}{k+1}L_{k-1}(x) \quad (2.17)$$

con  $L_0(x) = 1$  e  $L_1(x) = x$ .

Questi polinomi godono di alcune importanti proprietà (si veda [30] per approfondimenti):

$$|L_k(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (2.18)$$

$$L_k(\pm 1) = (\pm 1)^k \quad (2.19)$$

$$|L'_k(x)| \leq \frac{1}{2}k(k+1), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (2.20)$$

$$L'_k(\pm 1) = (\pm 1)^k \frac{1}{2}k(k+1) \quad (2.21)$$

$$\int_{-1}^1 L_k^2(x) dx = \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-1} \quad (2.22)$$

Una generica funzione  $u \in L_w^2(-1, 1)$  può essere approssimata in termini di polinomi di Legendre:

$$u(x) \cong \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k L_k(x), \quad \hat{u}_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 u(x) L_k(x) dx \quad (2.23)$$

Sono ovviamente possibili approssimazioni in termini di altre funzioni interpolanti ad esempio quelle corrispondenti ai polinomi trigonometrici, che danno origine ad un metodo spettrale di tipo Fourier. Questa scelta si concilia male con il trattamento di problemi differenziali in cui è presente una geometria complessa, e richiede un comportamento di periodicità della soluzione

## 2.2 Integrazione e differenziazione

Concludiamo questa sezione, illustrando brevemente alcune delle tecniche di differenziazione e integrazione numerica che verranno usate largamente in seguito.

## Integrazione

Si definisce *formula di quadratura* un metodo numerico in grado di fornire l'approssimazione di un integrale in termini di un numero finito di valori della funzione integranda (*i punti di quadratura*).

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + R_f \quad (2.24)$$

in cui  $R_f$  è l'errore che si commette rispetto all'integrazione analitica. Nel caso unidimensionale si parla di *formule di quadratura* nel caso bidimensionale di *formule di cubatura*.

Vediamo adesso le *formule di quadratura di Gauss*: inizialmente per semplicità considereremo il caso in cui i punti di quadratura  $x_0, \dots, x_n$  vengono assegnati. Supponiamo che i punti di quadratura siano gli zeri di un generico polinomio ortogonale di grado  $n + 1$ , e indichiamo con  $w_0, \dots, w_n$  la soluzione del sistema lineare:

$$\sum_{j=0}^n (x_j)^k w_j = \int_{-1}^1 x^k w(x) dx \quad 0 \leq k \leq n \quad (2.25)$$

in cui i  $w_j$  vengono chiamati "*pesi*". Abbiamo che:

1)  $w_j > 0$  per  $j = 0, \dots, n$  e

$$\sum_{j=0}^n p(x_j) w_j = \int_{-1}^1 p(x) w(x) dx \quad \text{per tutti } p \in \mathbb{P}_{2n+1} \quad (2.26)$$

2) Non è possibile trovare  $x_j, w_j, j = 0, \dots, n$  come nel caso prima illustrato, per i polinomi  $p \in \mathbb{P}_{2n+2}$ .

Come abbiamo detto, i punti di quadratura possono essere definiti come zeri di particolari polinomi. Consideriamo i punti di Gauss

$$x_j (j = 1, \dots, n-1) \text{ sono zeri di } L'_n \quad (2.27)$$

Come si può notare i punti di quadratura sono tutti interni a  $(-1, 1)$ . Volendo imporre le condizioni al contorno in uno o entrambi i punti estremi, si ha la necessità di generalizzare le formule di integrazione di Gauss per includere questi punti.

Per questo motivo introduciamo le *formula di integrazione di Gauss-Lobatto* che generalizzano quelle di Gauss.

Considerando il polinomio di Legendre (2.16), si ha :

$$x_0 = -1, x_n = 1, x_j (j = 1, \dots, n-1) \text{ sono zeri di } L'_n \quad (2.28)$$

$$w_j = \frac{2}{n(n+1)} \frac{1}{[L'_n(x_j)]^2} \quad j = 0, \dots, n \quad (2.29)$$

I nodi così definiti sono detti di *Legendre-Gauss-Lobatto (LGL)*, e sono quelli di maggiore interesse per i nostri scopi. Il prodotto scalare in  $L_w^2(-1, 1)$  e la norma ad esso associata sono

$$(u, v)_n = \sum_{j=0}^n w_j u(x_j) v(x_j) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=0}^n \frac{1}{L'_n(x_j)} u(x_j) v(x_j) \quad (2.30)$$

$$\|v\|_n = \sqrt{\left( \sum_{j=0}^n w_j v^2(x_j) \right)} = \sqrt{\left( \frac{2}{n(n+1)} \right) \sum_{j=0}^n \frac{v^2(x_j)}{L'_n(x_j)}} \quad (2.31)$$

Consideriamo:

$$q(x) = p_{n+1}(x) + a p_n(x) + b p_{n-1}(x) \quad (2.32)$$

dove  $a$  e  $b$  sono scelti in modo che  $q(-1) = q(1) = 0$ , definiamo  $x_0, \dots, x_n$  come le  $n+1$  radici di  $q(x)$  con  $-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$

$$\sum_{j=0}^n (x_j)^k w_j = \int_{-1}^1 x^k w(x) dx \quad 0 \leq k \leq n \quad (2.33)$$

da cui

$$\sum_{j=0}^n p(x_j) w_j = \int_{-1}^1 p(x) w(x) dx \quad \text{per tutti } p \in \Pi_{2n-1} \quad (2.34)$$

I nodi di Gauss giocano un ruolo importante nei metodi di collocazione, essendo i punti in cui i gradi di libertà delle equazioni differenziali vengono imposti. Nei

metodi di collocazione la rappresentazione di una funzione regolare  $u$  definita in  $(-1,1)$  è fatta in termini dei valori che assume in un insieme discreto di punti. Le derivate delle funzioni sono approssimate dalle derivate analitiche del polinomio interpolante. Il polinomio interpolante viene indicato come  $I_n u$ , è un'elemento di  $\Pi_n$  e soddisfa

$$I_n u(x_j) = u(x_j) \quad 0 \leq j \leq n \quad (2.35)$$

dove i punti  $x_j$  sono distinti. Se consideriamo un polinomio di grado  $N$  possiamo usare un'espressione della forma

$$I_N u = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k p_k \quad (2.36)$$

dove i  $p_k$  sono i polinomi di Lagrange, ovviamente

$$u(x_j) = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k p_k(x_j) \quad (2.37)$$

I vari  $\tilde{u}_k$  vengono chiamati *coefficienti polinomiali discreti di  $u$*  (o *coefficienti di espansione discreti*). La relazione inversa è

$$\tilde{u}_k = \frac{1}{\gamma_k} \sum_{j=0}^N u(x_j) p_k(x_j) w_j \quad (2.38)$$

Il fattore di normalizzazione nel caso di *Gauss-Lobatto* è dato da:

$$\gamma_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-1} \quad \text{per } k < N \quad (2.39)$$

$$\gamma_N = \frac{2}{N} \quad (2.40)$$

## Differenziazione

Un altro strumento indispensabile per lo sviluppo della nostra teoria è la differenziazione numerica, di cui di seguito daremo le principali definizioni e i principali risultati di nostro interesse. La differenziazione nello spazio trasformato consiste nel calcolare l'espansione di Legendre delle derivate della funzione stessa. Nel

seguito considereremo come polinomio interpolante sempre quello di Legendre, quindi al posto di  $p_k$  nelle formule verrà usato  $L_k$ . Se  $u = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k L_k$ , allora  $u'$  formalmente può essere rappresentato come:

$$u' = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k^{(1)} L_k \quad (2.41)$$

dove (per i particolari si veda ad esempio [25] )

$$\hat{u}_k^{(1)} = (2k+1) \sum_{\substack{p=k+1 \\ p+k \text{ dispari}}}^{\infty} \hat{u}_p \quad (2.42)$$

Generalizzando si ha:

$$\hat{u}_k^{(q-1)} = \frac{\hat{u}_{k-1}^{(q)}}{2k-1} - \frac{\hat{u}_{k+1}^{(q)}}{2k+3} \quad k \geq 1 \quad (2.43)$$

da cui è possibile ricavare esplicitamente le espressioni per i coefficienti di Legendre delle derivate di ordine superiore. Ad esempio per la derivata seconda si ha:

$$\hat{u}_k^{(2)} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \sum_{\substack{p=k+2 \\ p+k \text{ pari}}}^{\infty} [p(p+1) - k(k+1)] \hat{u}_p \quad (2.44)$$

Consideriamo ora la differenziazione nello spazio fisico. Se una determinata funzione  $u$  è nota in un insieme di punti di quadratura, si può calcolare una derivata approssimata di  $u$  differenziando il polinomio interpolante  $I_N u$  e valutandolo negli stessi punti. Il polinomio di grado  $N-1$

$$\mathcal{D}_N u = (I_N u)' \quad (2.45)$$

viene chiamato *Derivata collocativa di Legendre* di  $u$  relativa ad un determinato insieme di nodi di quadratura (nel nostro caso i nodi *LGL*). Per calcolare i valori di  $(\mathcal{D}_N u)(x_l)$  (con  $l = 0, \dots, N$ ), a partire dai valori di  $u(x_j)$ , ( $j = 0, \dots, N$ ), bisogna ricavare i coefficienti discreti di Legendre (usando la 2.38), quindi occorre usare

un'approssimazione troncata della (2.42) per calcolare gli  $\hat{u}_k^{(1)}$  e infine esprimere  $\partial_N u$  tramite la (2.41).

Questo approccio teorico viene sostituito nella pratica come segue: le derivate nei punti di collocazione vengono ottenute attraverso un prodotto matriciale:

$$(\mathcal{D}_N) (x_l) = \sum_{j=0}^N (D_N)_{lj} u(x_j) \quad (l = 0, \dots, N) \quad (2.46)$$

Gli elementi della matrice  $(D_N)_{lj}$  possono essere calcolati differenziando i polinomi di Lagrange  $\psi_j$  che valgono 1 su  $x_j$  e 0 in tutti gli altri punti di collocazione. Per i punti di collocazione di *Gauss-Lobatto* abbiamo

$$\psi_j(x) = \frac{-1}{N(N+1)L_N(x_j)} \frac{(1-x^2)L'_N(x)}{x-x_j} \quad (2.47)$$

che ci porta ad avere:

$$(D_N)_{lj} = \begin{cases} \frac{L_N(x_l)}{L_N(x_j)} \frac{-1}{x_l-x_j} & l \neq j \\ \frac{(N+1)N}{4} & l = j = 0 \\ -\frac{(N+1)N}{4} & l = j = N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.48)$$

# Capitolo 3

## Elementi Finiti

---

*In questo capitolo verrà descritto il metodo degli elementi finiti, illustrando in dettaglio la formulazione matematica e concludendo il capitolo con un esempio applicativo.*

### 3.1 Introduzione

Nel seguito verrà usata una terminologia e una simbologia tipica delle trattazioni sugli elementi finiti. Per questo motivo di seguito illustreremo brevemente una serie di proprietà e definizioni sulla teoria matematica relativa a tale teoria. Utilizzando una rigorosa terminologia matematica vediamo ora cosa si intende per *decomposizione di un domino in elementi*.

Consideriamo un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , connesso e la sua decomposizione finita:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \tau_h} K \quad (3.1)$$

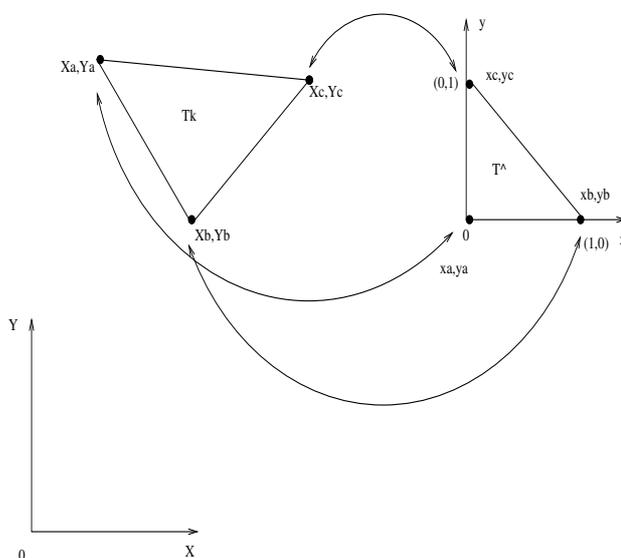
dove:

1. Ogni  $K$  è un poliedro con  $K^\circ \neq \emptyset$  (non esistono elementi che non contengono punti).
2.  $K_1^\circ \cap K_2^\circ = \emptyset$  per diversi  $K_1, K_2 \in \tau_h$  (non esistono due elementi che contengono lo stesso insieme di punti).

3. Se  $F = K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$  ( $K_1$  e  $K_2$  sono elementi distinti di  $\tau_h$ ), allora  $F$  è una faccia o un lato o un vertice di  $K_1$  e di  $K_2$ .
4.  $\text{diam}(K) \leq h$  per ogni  $K \in \tau_h$ .

$\tau_h$  viene definita *triangolazione* di  $\bar{\Omega}$ .

Figura 3.1: Mappatura dei triangoli



Per semplicità nel seguito assumeremo che ogni elemento  $K$  di  $\tau_h$  possa essere ottenuto come  $K = T_K(\hat{K})$ , dove  $\hat{K}$  è il poliedro di riferimento (si veda la figura 3.1 in cui è stato usato un triangolo) e  $T_K$  è una trasformazione affine, ad esempio  $T_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K$ , dove  $B_K$  è una matrice non singolare. Considereremo due casi:

1. il poliedro di riferimento  $\hat{K}$  è un semplice, ad esempio un triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  (con  $d = 2$ ), o il tetraedro di vertici  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ , (con  $d = 3$ ). Come conseguenza abbiamo che  $K = T_K(\hat{K})$  è un triangolo o un tetraedro.
2. il poliedro di riferimento  $\hat{K}$  è un cubo unitario di dimensione  $d \in [0, 1]^d$ . Come conseguenza ogni  $K = T_K(\hat{K})$  è un parallelogramma (quando  $d = 2$ ) o un parallelepipedo (quando  $d = 3$ )

In quest'ultimo caso la triangolazione è costruita da rettangoli unitari e per ogni  $K \in \tau_h$ , la matrice  $B_K$  che definisce la trasformazione affine  $T_K$  è diagonale. Un altro aspetto fondamentale che bisogna considerare nel metodo degli elementi finiti (gli elementi spettrali non sono altro che un caso particolare di questa famiglia), consiste nel determinare uno spazio finito  $X_h$ , che possa, di volta in volta, risultare una opportuna approssimazione dello spazio infinito  $X$  (quello fisico).

Indichiamo con  $\mathbb{P}_k$ ,  $k \geq 0$ , lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a  $k$  nelle variabili  $x_1, \dots, x_d$  e con  $\mathbb{Q}_k$  lo spazio dei polinomi che sono di grado minore o uguale a  $k$  rispetto a ogni variabile  $x_1, \dots, x_d$ , ad esempio se  $F(x, y) = x + y + xy$  avremo che  $F(x, y) \in \mathbb{Q}_1$  e che  $F(x, y) \in \mathbb{P}_2$ . Abbiamo che:

$$\dim \mathbb{P}_k = \binom{d+k}{k}, \quad \dim \mathbb{Q}_k = (k+1)^d \quad (3.2)$$

e che:

$$\mathbb{P}_k \subset \mathbb{Q}_k \subset \mathbb{P}_{dk} \quad (3.3)$$

## 3.2 Spazi vettoriali

Per semplicità illustriamo solo le definizioni relative ad un problema scalare, il caso vettoriale è una naturale evoluzione di questo. Definiamo quello che è lo spazio più comunemente usato:  $X_h$ . Nel caso dei triangoli noi poniamo:

$$X_h = X_h^k := \left\{ v_h \in C^0(\widehat{\Omega}) \mid v_{h|K} \in \mathbb{P}_k \forall K \in \tau_h \right\}, \quad k \geq 1 \quad (3.4)$$

che viene chiamato *spazio degli elementi finiti triangolari*.

Nel caso dei quadrangoli si definisce:

$$X_h = X_h^k := \left\{ v_h \in C^0(\widehat{\Omega}) \mid v_{h|K} \circ T_k \in \mathbb{Q}_k \forall K \in \tau_h \right\}, \quad k \geq 1 \quad (3.5)$$

che viene chiamato *spazio degli elementi di tipo parallelepipedo*.

## 3.3 Gradi di libertà e Funzioni di Forma

Per poter utilizzare praticamente lo spazio  $X_h$  dobbiamo definire una base. Un parametro molto importante da definire è il numero dei gradi di libertà per ogni

elemento  $K$ . Consideriamo due casi, quello triangolare (verrà sviluppato poi un esempio in seguito), e quello quadrangolare (che sono quelli che si utilizzano con gli elementi spettrali), per entrambi verrà trattato solo il caso scalare.

### 3.3.1 Elementi finiti triangolari

Consideriamo il caso dei triangolari con  $d = 2$ . Per identificare  $v_h|_K$ , dove  $k = 1$  (elementi del primo ordine), noi dobbiamo scegliere tre gradi di libertà per ogni elemento  $K$ , con il vincolo aggiuntivo che  $v_h \in C^0(\overline{\Omega})$ . La scelta più semplice è quella dei valori dei vertici di ogni  $K$ , se invece della  $X_h^1$  definita in (3.4), noi consideriamo la:

$$Y_h^1 := \{v_h \in L^2(\Omega) \mid v_h|_K \in \mathbb{P}_1 \forall K \in \tau_h\} \quad (3.6)$$

allora noi potremo scegliere i tre gradi di libertà come i valori di tre punti arbitrari (e non necessariamente coincidenti con i vertici), ad esempio si potrebbero prendere come nodi tre punti interni, oppure i tre punti medi di ogni lato. Quando  $k=2$  si assume che i gradi di libertà degli elementi siano dati dai valori ai vertici e ai punti medi di ogni lato. A questo punto risulta semplice definire una base per  $X_h^k$ . In particolare se indichiamo con  $a_j$ , con  $j = 1, \dots, N_h$  l'insieme di nodi globale in  $\overline{\Omega}$ , sarà sufficiente scegliere queste funzioni  $\varphi \in X_h^k$  come:

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N_h \quad (3.7)$$

queste funzioni di base sono chiamate *funzioni di forma*.

### 3.3.2 Elementi finiti a forma di parallelepipedo

Prima di tutto definiamo il grado di libertà del quadrato di riferimento  $\widehat{K} = [0, 1]^2$ , quando  $k = 1$  i gradi di libertà sono dati dai valori dei vertici del quadrato, quando  $k = 2$  si possono aggiungere i valori dei punti medi di ogni lato e il centro di gravità del quadrato. Quando  $k = 3$  si possono considerare i valori dei vertici e dei punti di coordinate  $1/3$  e  $2/3$  di ogni lato.

Assumiamo adesso che  $K = T_K(\widehat{K})$  dove  $T_K$  sia una mappatura invertibile affine. Noi abbiamo che  $v_h \in X_h^k$  se  $v_h \in C^0(\overline{\Omega})$  e  $v_h|_K \circ T_K \in \mathbb{Q}_k$ . quindi i gradi di libertà di  $K$  sono i valori di  $v_h$  ai nodi  $a_{j,K} = T_K(\widehat{a}_j)$  dove  $\widehat{a}_j$  sono i nodi in  $[0, 1]^d$ . Il numero totale di gradi di libertà viene fornito dal valore di  $v_h$  in un insieme globale di nodi

$$\Sigma_h := \{a_{j,K} \mid K \in \tau_h\} \subset \overline{\Omega} \quad (3.8)$$

Indichiamo con  $a_j$  questi nodi,  $j = 1, \dots, N_h$ . Le funzioni di base (o funzioni di forma) saranno dei polinomi a tratti  $\varphi \in X_h^k$  come i seguenti:

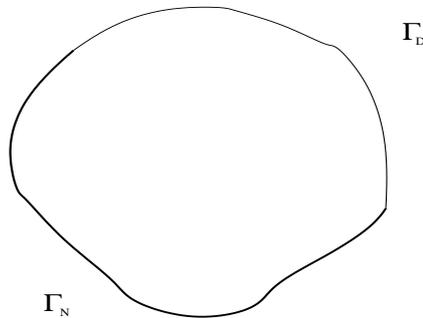
$$\varphi_j(a_i) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N_h \quad (3.9)$$

## 3.4 Esempio: equazione di Helmholtz scalare

### 3.4.1 Forma debole del problema

Consideriamo un dominio chiuso e limitato  $\Omega$  la cui frontiera  $\Gamma$  è suddivisa in due parti  $\Gamma_D, \Gamma_N$  su cui imponiamo rispettivamente condizioni di Dirichlet e di Neumann come illustrato in figura 3.2 .

Figura 3.2: Dominio Fisico



Consideriamo il seguente problema (Helmholtz)

$$\begin{cases} \nabla^2 u + k^2 u = F & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \rho & \text{su } \Gamma_N \end{cases} \quad (3.10)$$

Da qui in poi senza perdita di generalità considereremo il caso di  $\varphi = 0$ .

La forma debole del problema (*weak form*) è:

trovare  $u \in H_0^1(\Omega)$  con:

$$H_0^1(\Omega) \equiv \{u \in L^2(\Omega) : u_x \in L^2(\Omega), u_y \in L^2(\Omega), u = 0 \text{ su } \Gamma_D\} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.11)$$

tale che:

$$-\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \rho v \, d\Omega + \int_{\Omega} k^2 u v \, d\Omega = \int_{\Omega} F v \, d\Omega \quad (3.12)$$

Lo spazio in cui si cercano le soluzioni è di dimensione infinita, occorre pertanto costruire un sottospazio approssimante di dimensione finita. Suddividiamo il nostro dominio in elementi che nel caso illustrato saranno triangolari.

### 3.4.2 Caso elementi triangolari

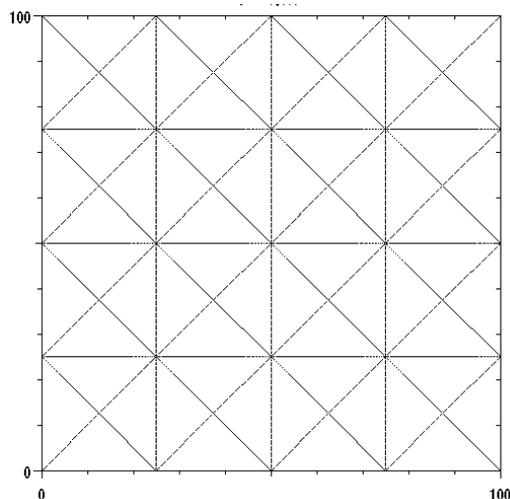
Consideriamo il sottospazio  $V_h$  formato da triangoli elementari

$$V_h \subset H^1(\Omega) ; \quad V_h \equiv \{v : v \in C^0(\Omega) \text{ e } |_{T_k} \in P^1(T_k)\}$$

$$P^1(T_k) = \{\alpha x + \beta y + \gamma, (x, y) \in T_k\}$$

un esempio di tale decomposizione è illustrato in figura 3.3 nel caso di un dominio quadrato.

Figura 3.3: Mesh Triangolare



Si può dimostrare che se il passo di discretizzazione tende a zero il sottospazio  $V_h$  tende a ricoprire lo spazio  $H^1(\Omega)$

### 3.4.3 Convergenza della soluzione

Consideriamo  $u$  soluzione analitica della forma debole su  $H^1(\Omega)$ , e  $u_h$  soluzione numerica della forma debole su  $V_h$ .

Per avere convergenza si deve avere:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^2 \|u\| \quad (3.13)$$

La norma deve essere calcolata su  $L^2(\Omega)$  (norma di tale spazio). Se individuiamo con  $N_n$  il numero di nodi della nostra discretizzazione abbiamo che la soluzione del nostro spazio può essere scritta come :

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^{N_n} U_i N_i(x, y) \quad (3.14)$$

con  $U_i$  costante da determinare,  $N_i(x, y)$  elementi della nostra base. Il nostro problema si riconduce a trovare

$$\begin{cases} u_h \in V_h \\ u_h = \sum_{i=1}^{N_n} U_i N_i(x, y) \text{ tali che } u_h = \varphi \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.15)$$

Il nostro problema iniziale diventa dunque

$$-\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Omega} k^2 u_h v \, d\Omega = \int_{\Omega} F v \, d\Omega \quad (3.16)$$

Se sfruttiamo il metodo di Galerkin le funzioni di base coincideranno con le funzioni di test cioè  $v \equiv N_i$ .

Sostituendo avremo dunque:

$$-\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla N_i \, d\Omega + \int_{\Omega} k^2 u_h \cdot N_i \, d\Omega = \int_{\Omega} F \cdot N_i \, d\Omega \quad (3.17)$$

Essendo poi  $u_h = \sum_{i=1}^{N_n} U_i N_i(x, y)$  si ha

$$-\sum_{j=1}^{N_n} U_j \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nabla N_i d\Omega + \sum_{j=1}^{N_n} U_j \int_{\Omega} k^2 N_j N_i d\Omega = \int_{\Omega} F N_i d\Omega \quad (3.18)$$

Se indichiamo con:

$$\begin{cases} K_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nabla N_i d\Omega & \text{Matrice Di Stiffness} & i, j = 1..N_n \\ M_{i,j} = \int_{\Omega} k N_j N_i d\Omega & \text{Matrice Di Massa} & i, j = 1..N_n \\ F_i = \int_{\Omega} F N_i d\Omega & \text{Termini Noti} & i = 1..N_n \end{cases} \quad (3.19)$$

Abbiamo in definitiva

$$-K U + M U = F \quad (3.20)$$

Se poniamo

$$A = -K + M \quad (3.21)$$

otteniamo il sistema finale da risolvere

$$A U = F \quad (3.22)$$

La matrice K è sempre associata al laplaciano quindi una volta trovata è da usare come se fosse un operatore.

### 3.4.4 Operatori differenziali discretizzati

Consideriamo sempre il caso triangolare, vediamo ora come si costruiscono gli operatori differenziali discretizzati relativi all'equazione di Helmholtz.

Per prima cosa occorre suddividere la regione di interesse in sottodomini formati da elementi, che per ora supporremo triangolari. E' conveniente mappare ogni triangolo in uno spazio che ci risulti comodo, consideriamo ad esempio la trasformazione di coordinate illustrata in figura 3.4:

La trasformazione di coordinate è la seguente

$$\begin{cases} x = \alpha_1 \hat{x} + \beta_1 \hat{y} + \delta_1 \\ y = \alpha_2 \hat{x} + \beta_2 \hat{y} + \delta_2 \end{cases} \quad (3.23)$$

Descriviamo i vecchi punti nelle nuove coordinate

$$\begin{cases} x_a = \delta_1 \\ x_b = \alpha_1 + \delta_1 \\ x_c = \beta_1 + \delta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_1 = x_a \\ \alpha_1 = x_b - x_a \\ \beta_1 = x_c - x_a \end{cases} \quad (3.24)$$

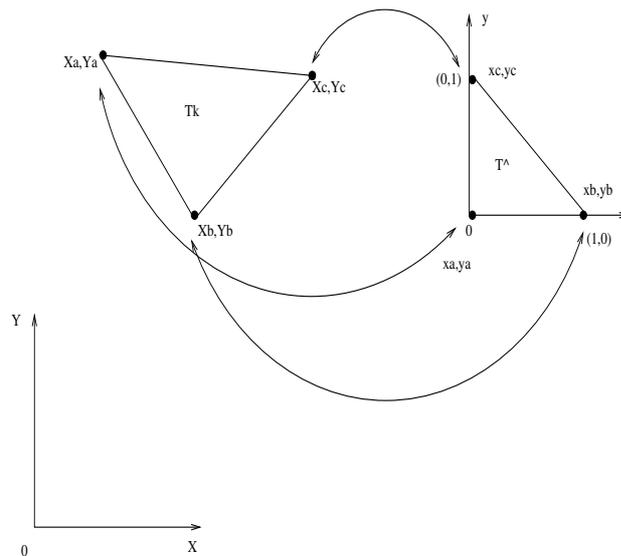
$$\begin{cases} y_a = \delta_2 \\ y_b = \alpha_2 + \delta_2 \\ y_c = \beta_2 + \delta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_2 = y_a \\ \alpha_2 = y_b - y_a \\ \beta_2 = y_c - y_a \end{cases} \quad (3.25)$$

A partire dalle coordinate dello spazio fisico si arriva alle coordinate del nuovo spazio, questo per ogni elemento della struttura che dobbiamo analizzare. Vediamo le derivate; bisogna notare subito che trattandosi di funzioni composte bisogna derivare le funzioni come tali:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{y}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \end{cases} \quad (3.26)$$

Dopo qualche passaggio si arriva a definire gli operatori come:

Figura 3.4: Mappatura dei triangoli



$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J(\hat{x}, \hat{y})} \left( \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J(\hat{x}, \hat{y})} \left( \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right) \end{cases} \quad (3.27)$$

con

$$J(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \end{vmatrix} \quad (3.28)$$

Eseguendo le derivate otteniamo il seguente operatore:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J(\hat{x}, \hat{y})} \left( \beta_2 \frac{\partial}{\partial \hat{x}} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J(\hat{x}, \hat{y})} \left( \beta_1 \frac{\partial}{\partial \hat{x}} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right) \end{cases} \quad (3.29)$$

con

$$J(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \quad (3.30)$$

In definitiva si ha:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} \left( \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2} \left( \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right) \end{cases} \quad (3.31)$$

### 3.4.5 Matrice di Stiffness

Esprimiamo adesso le varie matrici più in dettaglio. Vediamo per prima la definizione della matrice di Stiffness esprimendo l'integrale sulla regione da analizzare come somma di integrali sui triangoli

$$K_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nabla N_i \, d\Omega = \sum_{k=1}^{N_{el}} \int_{\hat{T}_k} \nabla N_j \cdot \nabla N_i \, d\Omega \quad (3.32)$$

Passiamo adesso al parent domain (usando la mappatura illustrata in fig 3.4).

Ricordando che :

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\Omega = \int_{\hat{\Omega}} J(\hat{x}, \hat{y}) \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{\Omega} \quad (3.33)$$

si ha dunque:

$$K_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_{el}} \int_{\hat{T}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) \nabla \hat{N}_i \cdot \nabla \hat{N}_j d\hat{\Omega} \quad (3.34)$$

Dove  $\hat{N}_i, \hat{N}_j$  sono  $N_i, N_j$  espressi nel parent domain e  $J^{(k)}$  è lo jacobiano del k-esimo elemento. Dato che:

$$\nabla \hat{N}_i = \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial x} i_x + \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial y} i_y \quad (3.35)$$

si ha che:

$$\nabla \hat{N}_i : \nabla \hat{N}_j = \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial x} + \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial y} \quad (3.36)$$

si arriva poi a

$$K_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_{el}} \int_{\hat{T}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) \left( \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial x} + \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial y} \right) d\hat{\Omega} \quad (3.37)$$

ricordando le espressioni delle derivate parziali date in precedenza si ha:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} \left( \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2} \left( \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right) \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} K_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_{el}} \int_{\hat{T}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) & \left( \frac{1}{(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{y}} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \hat{y}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2)^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{y}} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \hat{y}} \right) \right) d\hat{\Omega} \quad (3.39) \end{aligned}$$

risolvendo le derivate si ottiene:

$$\begin{aligned}
K_{i,j} = & \sum_{k=1}^{N_{el}} \int_{\hat{T}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) \left( \frac{1}{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2} \left( \beta_2 \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{x}} - \alpha_2 \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{y}} \right) \left( \beta_2 \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \hat{x}} - \alpha_2 \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \hat{y}} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)^2} \left( \beta_1 \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{x}} - \alpha_1 \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{y}} \right) \left( \beta_1 \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \hat{x}} - \alpha_1 \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \hat{y}} \right) \right) d\hat{\Omega} \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Le funzioni di base devono avere una caratteristica principale devono valere “1” in un punto e “0” negli altri, un possibile insieme di funzioni di base è il seguente:

$$\begin{cases} \hat{N}_1(\hat{x}, \hat{y}) = 1 - \hat{x} - \hat{y} \\ \hat{N}_2(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x} \\ \hat{N}_3(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y} \end{cases} \quad (3.41)$$

possiamo notare che tutte le derivate risultano delle costanti che valgono 1, 0, -1 a seconda dei casi, infatti abbiamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{N}_1}{\partial \hat{x}} &= -1 & \frac{\partial \hat{N}_2}{\partial \hat{x}} &= 1 & \frac{\partial \hat{N}_3}{\partial \hat{x}} &= 0 \\
\frac{\partial \hat{N}_1}{\partial \hat{y}} &= -1 & \frac{\partial \hat{N}_2}{\partial \hat{y}} &= 0 & \frac{\partial \hat{N}_3}{\partial \hat{y}} &= 1
\end{aligned} \quad (3.42)$$

Dal momento che *localmente* sia gli elementi interni dell'integrale precedente che lo jacobiano sono costanti possiamo portare fuori tutto dall'integrale stesso e ottenere considerando per semplicità l'elemento k-esimo:

$$\begin{aligned}
K_{i,j}^{(k)} = & \int_{\hat{T}_k} d\hat{\Omega} (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \frac{1}{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^4} \left( \left( \beta_2 \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{x}} - \alpha_2 \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{y}} \right) \left( \beta_2 \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \hat{x}} - \alpha_2 \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \hat{y}} \right) + \right. \\
& \left. + \left( \beta_1 \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{x}} - \alpha_1 \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{y}} \right) \left( \beta_1 \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \hat{x}} - \alpha_1 \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \hat{y}} \right) \right) \quad (3.43)
\end{aligned}$$

Con i,j che va da 1 a 3, l'integrale superstate non e' altro che l'area del triangolo nello spazio duale che è pari a  $\frac{1}{2}$ , in definitiva si ha:

$$\begin{aligned}
K_{i,j}^{(k)} = & \frac{1}{2} \frac{1}{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^3} \left( \left( \beta_2 \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{x}} - \alpha_2 \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{y}} \right) \left( \beta_2 \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \hat{x}} - \alpha_2 \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \hat{y}} \right) + \right. \\
& \left. + \left( \beta_1 \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{x}} - \alpha_1 \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{y}} \right) \left( \beta_1 \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \hat{x}} - \alpha_1 \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \hat{y}} \right) \right) \quad (3.44)
\end{aligned}$$

La matrice che si trova per il singolo elemento è la *matrice di Stiffness*, questa matrice non dipende dalla natura del problema ma solo dal tipo di elementi utilizzati (in questo caso triangolari), quindi risulta associata all'operatore laplaciano e si può considerare a sua volta come un'operatore da applicare all'equazione che si vuole risolvere. Vediamo la matrice per esteso.

$$K_{i,j} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [(\beta_2 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \alpha_1)^2] & [-(\beta_2 - \alpha_2)\beta_2 - (\beta_1 - \alpha_1)\beta_1] & [(\beta_2 - \alpha_2)\alpha_2 + (\beta_1 - \alpha_1)\alpha_1] \\ [-(\beta_2 - \alpha_2)\beta_2 - (\beta_1 - \alpha_1)\beta_1] & [\beta_2^2 + \beta_1^2] & [-\beta_2\alpha_2 + \beta_1\alpha_1] \\ [(\beta_2 - \alpha_2)\alpha_2 + (\beta_1 - \alpha_1)\alpha_1] & [-\beta_2\alpha_2 + \beta_1\alpha_1] & [\alpha_1^2 + \alpha_2^2] \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Dato che abbiamo :

$$\begin{cases} \beta_1 = x_c - x_a; & \alpha_1 = x_b - x_a \\ \beta_2 = y_c - y_a; & \alpha_1 = y_b - y_a \end{cases} \quad (3.46)$$

la matrice risulterà completamente identificata a partire dalle coordinate fisiche dei nodi su cui incide quel particolare elemento considerato.

Questo è vero per il singolo elemento locale, passando al caso globale dobbiamo mappare le singole matrici locali nella matrice globale. Per fare questo bisogna seguire i seguenti passi: consideriamo un generico elemento triangolare (come quello illustrato in fig 3.4) che sia individuato dai nodi (numerazione globale)  $a, b, c$ , ognuno di questi nodi ha associate le sue coordinate nello spazio fisico  $(x_a, y_a), (x_b, y_b), (x_c, y_c)$ ; tramite queste coordinate fisiche calcoliamo lo jacobiano dell'elemento (che ricordiamo è costante solo per il singolo elemento); a questo punto calcoliamo la matrice locale.

Una volta fatto questo mappiamo la matrice locale nella matrice globale in questo modo:

- all'elemento 1-1 locale corrisponderà l'elemento a-a della matrice globale,
- all'elemento 1-2 locale corrisponderà l'elemento a-b della matrice globale,
- all'elemento 1-3 locale corrisponderà l'elemento a-c della matrice globale e così via.

Una cosa importante da notare è che dato che ogni punto di griglia può essere incluso in più di un'elemento, i contributi vanno sempre sommati, ad esempio bisogna sommare al contributo dell'elemento 1-1 quello del 1-2, 1-3 e così via, questo sia per la matrice di Stiffness che per quella di massa che per il vettore dei termini noti. Si suppone che per tutti gli elementi si segua lo stesso ordine per numerare gli elementi (orario o antiorario) nella descrizione globale.

### 3.4.6 Matrice di massa

La matrice di massa è stata definita come:

$$M_{i,j} = \int_{\Omega} k^2 N_i N_j d\Omega \quad (3.47)$$

Passiamo al dominio locale e consideriamo solo il generico elementino di matrice:

$$M_{i,j}^{(k)} = \int_{\hat{\Omega}} J(\hat{x}, \hat{y}) k^2 \hat{N}_i \hat{N}_j d\hat{\Omega} \quad (3.48)$$

considerando la seguente formula di quadratura ,

$$\int_{\hat{\Omega}} \xi^a \eta^b \chi^c d\hat{\Omega} = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A \quad (3.49)$$

Si arriva a definire la matrice per il singolo elemento come:

$$M^{(k)} = \frac{J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y})}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

con

$$J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

e

$$\begin{cases} \beta_1 = x_c - x_a; & \alpha_1 = x_b - x_a \\ \beta_2 = y_c - y_a; & \alpha_2 = y_b - y_a \end{cases} \quad (3.52)$$

### 3.4.7 Vettore dei termini noti

Dalla forma debole del problema si arriva a definire

$$\int_{\Omega} F(x, y) N_i d\Omega \quad (3.53)$$

Nel dominio fisico possiamo rappresentare la  $F(x,y)$  , che deve essere nota punto per punto, quindi possiamo scrivere:

$$F^{(k)}|_{\Omega} = \sum_{j=1}^3 F(a_j) N_j \quad (3.54)$$

passando al problema in forma debole, proiettando su  $N_i$  e passando nello spazio di riferimento si ottiene:

$$F_i^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) = J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) \sum_{j=1}^3 F(a_j) \hat{N}_i \hat{N}_j \quad (3.55)$$

si arriva a definire

$$F_i^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) = J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) \sum_{j=1}^3 F(a_j) m_j \quad \text{con} \quad m_j = \begin{cases} \frac{1}{6} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (3.56)$$

Inoltre dato che in pratica stiamo fissando un'incognita del problema ogni volta che si impone l'elemento  $i$ -esimo del vettore  $F$  si deve annullare la  $i$ -esima riga della matrice risoltrice del sistema, imponendo a 1 l'elemento diagonale (se ci si pensa un attimo è esattamente come porre  $u_i = F_i$ ).

### 3.4.8 Il problema della validazione dei risultati

Per avere la validazione dei risultati (e quindi la certezza che il solutore lavori correttamente), non è sufficiente avere un valore piccolo dell'errore rispetto alla soluzione esatta, ma occorre anche che questo scali, secondo una precisa legge, con il passo della griglia che si sta utilizzando. Questo vale in generale per qualunque solutore basato sugli elementi finiti, si deve cioè avere che:

$$\|u(x, y) - u_h(x, y)\|_0 \leq C h^{k+1} \|u(x, y)\| \quad (3.57)$$

dove  $k$  è l'ordine degli elementi che si stanno usando ( $k=1$  nel nostro caso in cui usiamo elementi lineari) e  $h$  è la grandezza media del passo della griglia che stiamo usando.

Inoltre nel caso di solutori basati sul metodo dei minimi quadrati lineari si deve garantire la condizione sulla divergenza, cioè

$$\|\nabla \cdot u_h(x, y) - \rho(x, y)\|_0 \leq C h^k \|u(x, y)\| \quad (3.58)$$

Per eseguire il confronto, in ogni punto in cui è stato discretizzato il dominio da analizzare, facciamo lavorare il solutore con un termine noto ricavato a partire dalla soluzione analitica.

# Capitolo 4

## Elementi spettrali

---

*In questo capitolo verranno descritti il metodo degli elementi spettrali e i suoi vantaggi, illustrando in dettaglio la formulazione matematica e concludendo il capitolo con un esempio applicativo, mettendo in evidenza le principali differenze con il metodo agli elementi finiti descritto nel capitolo precedente.*

### 4.1 Uso degli elementi spettrali

Il metodo degli elementi spettrali (SEM) è una tecnica di soluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) largamente usata in meccanica computazionale e in fluidodinamica che riunisce i fondamenti e i vantaggi dei metodi agli elementi finiti di tipo "h" in cui per giungere alla convergenza della soluzione si può operare solo sul raffinamento della mesh e le tecniche spettrali di tipo "p" in cui si può anche variare l'ordine dei polinomi in gioco.

Nella discretizzazione basata sugli elementi spettrali il dominio computazionale viene generalmente diviso in una famiglia di quadrilateri (2-D) o esaedri (3-D) e la soluzione della PDE viene approssimata tramite una funzione polinomiale a tratti di grado fissato. In tempi recenti sono allo stato di studio solutori che lavorano su mesh triangolari, invece in questa tesi noi ci occuperemo esclusivamente di solutori basati su mesh quadrangolari e tetraedriche. Abbiamo fatto questa scelta perchè questo tipo di elementi è largamente il più diffuso e il più testato e nel tempo ha dato i risultati migliori. Le formule di quadratura di Gauss-Lobatto e le formule di derivazione descritte nel capitolo 2 vengono applicate all'equazione differenziale scritta in forma variazionale, ottenendo così un sistema algebrico che viene solitamente risolto tramite tecniche interattive. La convergenza verso la soluzione esatta

viene assicurata con l'incremento del grado dei polinomi approssimanti, lasciando inalterata la griglia computazionale. Questo è il grosso vantaggio dei metodi spettrali.

Infatti immaginiamo di avere una geometria molto complessa in cui dobbiamo risolvere un dato problema (diffusione di calore, dilatazione termica propagazione elettromagnetica ecc, ecc). Con un classico FEM noi potremo ad esempio usare (o realizzare, in casi particolari) un solutore che utilizzi elementi di grado 2, fare la simulazione e valutare i risultati. Se poi noi volessimo una precisione maggiore potremo raffinare la mesh ma, anche con mesh molto raffinate, per ottenere dei vantaggi seri occorrerebbe aumentare l'ordine del metodo che si sta utilizzando. Questo comporta due problemi principali, il primo è la rigenerazione della mesh che per geometrie complicate può richiedere notevoli tempi di computazione, il secondo è che generalmente occorre cambiare solutore.

Questo non succede con i SEM, infatti una volta generata la griglia di quadrilateri, per passare ad elementi di ordine superiore occorre semplicemente specificarne il grado al solutore che provvederà automaticamente a generare i nodi che gli occorrono (nella fattispecie si utilizzano quelli di LGL). Questo comporta oltre ad un notevole risparmio di tempo anche una maggiore precisione, come dimostreremo in seguito, quando introdurremo le formule dell'errore spettrale, con un grafico comparativo che dimostra la migliore convergenza dei metodi spettrali rispetto ai classici metodi ad elementi finiti. Nei FEM difficilmente si usano elementi oltre il quarto ordine, questo per problemi inerenti lo sviluppo del solutore. Infatti aumentare l'ordine comporta aumentare non di poco la difficoltà dei calcoli da sviluppare che, oltre il quarto ordine, risultano abbastanza onerosi. Negli spettrali si può scegliere arbitrariamente l'ordine degli elementi e l'unica limitazione risulta quella delle risorse hardware che hanno a disposizione.

Quando si deve valutare un approccio numerico a una equazione differenziale alle derivate parziali (PDE) del metodo utilizzato è importante considerare:

1. accuratezza,
2. efficienza,
3. generalità

Questo a prescindere dal fatto che esso sia un metodo analitico, semi-analitico o di griglia, come nel nostro caso. Analizziamo punto per punto questi tre aspetti relativamente al SEM (per approfondimenti [11]).

Iniziamo con il considerare l'*accuratezza* o in termini più rigorosamente matematici il tasso di convergenza. Da questo punto di vista il SEM risulta un ottimo

metodo, infatti l'errore in cui si incorre è uguale, a meno di una costante moltiplicativa, alla migliore approssimazione ottenibile relativamente al sottospazio dei polinomi approssimanti utilizzati. L'errore che si commette nell'approssimazione polinomiale dipende dalla regolarità della soluzione che si vuole trovare (che dipende dal problema in esame). Quindi i metodi agli elementi spettrali sono adatti per tutta quella classe di problemi in cui le soluzioni che si cercano presentano una regolarità di ordine elevato, o per quei problemi in cui nella gran parte dei casi si presenta tale livello di regolarità (ad esempio nella meccanica dei fluidi incompressibili). Nel caso dell'elettromagnetismo questo si ha nei mezzi omogenei, infatti nei mezzi non omogenei a causa del salto di impedenza tra i due mezzi in generale si presenta la discontinuità in almeno una componente dei due campi elettrico e magnetico, questo fatto non crea problemi con gli elementi spettrali a patto per di imporre opportune condizioni al contorno nella frontiera tra i due mezzi. Una delle tecniche utilizzate, per risolvere questo problema, consiste nel duplicare i nodi presente nella frontiera della discontinuità aumentando così i gradi di libertà del problema. Discorso a parte bisogna fare per i domini in cui si presentano cuspidi che inducono discontinuità non trattabili in maniera ordinaria e per le quali bisogna provvedere ad introdurre particolari condizioni al contorno quali ad esempio le condizioni di Meixner.

Altro parametro è l'*efficienza*, parametro che non è indipendente dal tasso di convergenza del metodo, ma che non è da confondere con esso. Tale parametro viene infatti misurato dalla *complessità computazionale* richiesta dell'algoritmo per garantire il livello di accuratezza richiesto. Consideriamo un solutore basato sul SEM in cui abbiamo imposto come ordine  $N$ , confrontiamolo con una tecnica di tipo  $h$  convenzionale (ad esempio un classico FEM), nelle prove imponiamo ovviamente di lavorare con lo stesso numero di gradi di libertà e nelle ipotesi di regolarità formulate prima (dominio in cui le soluzioni siano sufficientemente regolari). In queste ipotesi avremo che il SEM avrà una complessità computazionale  $N$  volte maggiore (cioè pari all'ordine usato) rispetto al metodo  $h$ . Se per richiediamo al solutore di essere ad alta accuratezza (cioè di avere errori rispetto ad una soluzione analitica presa come campione, piccoli in senso assoluto), i metodi spettrali risulteranno più efficienti dei corrispondenti metodi di tipo  $h$ . Purtroppo per quando siamo in presenza di soluzioni poco regolari o se l'errore accettabile non è molto piccolo si ha il contrario, e le tecniche di tipo  $h$  risulteranno più efficienti.

Vediamo ora l'ultimo punto e cioè *la generalità*. Per generalità di un metodo si intende un metodo che può essere adattato ad un grande numero di casi con poche variazioni della sua formulazione, ad esempio nel caso dell'elettromagnetismo i metodi quasi-analitici (quale ad esempio il metodo dei momenti MOM) sono largamente utilizzati. Essi, pur essendo sia molto efficienti che molto accurati, non sono per niente generali, infatti bisogna costruire una formulazione del metodo

per ogni struttura in esame. Esistono anche formulazioni del metodo che ovviano in parte a questo inconveniente come i metodi a dominio locale. Il SEM, come la maggior parte dei metodi di griglia con l'introduzione di macro-elementi e di mappature locali, può trattare una grande classe di geometrie e di problemi fisici complessi per i quali i metodi spettrali globali non risulterebbero appropriati. Infatti le difficoltà che si incontrano con le geometrie complesse vengono superate aumentando l'ordine dei polinomi interpolanti, inoltre quando siamo in presenza di problemi fisicamente complessi, (ad esempio presenza di funzioni rapidamente oscillanti), possiamo lavorare su due gradi di libertà e cioè variare la dimensione degli elementi utilizzati o raffinare il grado dei polinomi. La decomposizione in elementi che sono localmente continui consente di applicare i SEM a problemi con forti discontinuità.

In definitiva da questa analisi risulta che i SEM risultano appropriati per una larga e significativa classe di problemi.

## 4.2 La discretizzazione basata sugli elementi spettrali

Vediamo ora più in dettaglio la formulazione matematica dei SEM. Consideriamo un dominio  $\Omega$  2D limitato con contorno regolare e introduciamo lo spazio di Sobolev:

$$H^1(\Omega) \equiv \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (4.1)$$

$L^2(\Omega)$  è lo spazio delle funzioni a quadrato integrabili in  $\Omega$  (per una trattazione più approfondita vedi [25]). La discretizzazione in elementi spettrali parte dalla decomposizione di  $\Omega$  in termini di quadrilateri aperti  $\Omega_k$  (senza contorno) che non si sovrappongono (nel caso 3D useremo esaedri), come questi:

$$\bar{\Omega} = \cup_k \bar{\Omega}_k \quad \text{and} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \text{if} \quad i \neq j \quad (4.2)$$

Inoltre la decomposizione del dominio dovrebbe essere tale che l'intersezione fra la chiusura di due quadrilateri,  $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j$  sia l'insieme vuoto, o un punto o un bordo intero comune a due quadrilateri adiacenti. La figura 4.1 visualizza un esempio di decomposizione ammissibile.

Ogni elemento  $\Omega_k$  è mappato in un quadrato di riferimento  $\hat{\Omega} = (-1, +1)^2$  attraverso una opportuna trasformazione  $T_k$ . Una volta che il grado spettrale  $n$  è stato

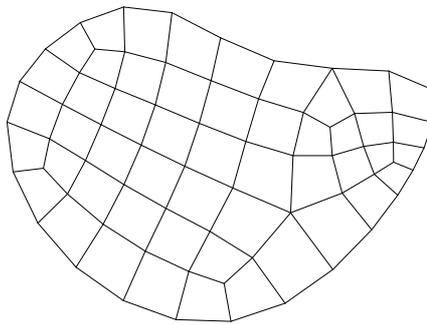
fissato, da notare che è comune a tutti i quadrilateri, si possono introdurre i nodi di Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) in  $\widehat{\Omega}$ , definendo come prodotto cartesiano dei nodi  $\xi_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  dove  $\xi_0 = -1$ ,  $\xi_n = +1$  ed i nodi  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  sono le radici della derivata prima del polinomio di Legendre del grado  $n$  (si veda [4] per un'analisi dettagliata).

Ora siamo in grado di definire i punti di griglia spettrali,  $\{\mathbf{x}\}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  facendo una mappatura inversa delle coordinate dei nodi LGL in  $\Omega_k$  e iterando il procedimento per tutti gli elementi ( $N \approx \frac{1}{2}$  il numero totale di punti di griglia dopo tale operazione). Questa operazione viene eseguita automaticamente una volta che il grado spettrale e la mesh di quadrilateri viene fornita al solutore. La procedura è riassunta in figura 4.2 dove come dominio è stato usato un dominio a T, ad esempio un divisore a T in guida d'onda.

Introduciamo ora  $\mathbb{Q}_n(\widehat{\Omega})$ , lo spazio delle funzioni polinomiali definite in  $\widehat{\Omega}$  di grado minore o uguale a  $n$ , rispetto ad ogni variabile dello spazio. Questo permette di introdurre lo spazio  $X_{h,n}(\Omega)$  delle funzioni continue su  $\Omega$  la cui restrizione su  $\Omega_k$  è mappata dalla funzione  $\hat{v}$  di  $\mathbb{Q}_n(\widehat{\Omega})$ . In simboli:

$$X_{h,n}(\Omega) = \left\{ v \in C^0(\Omega) : v|_{\Omega_k} = \hat{v} \circ T_k^{-1}, \hat{v} \in \mathbb{Q}_n(\widehat{\Omega}) \right\} \quad (4.3)$$

Figura 4.1: Un esempio di decomposizione in quadrilateri non strutturata



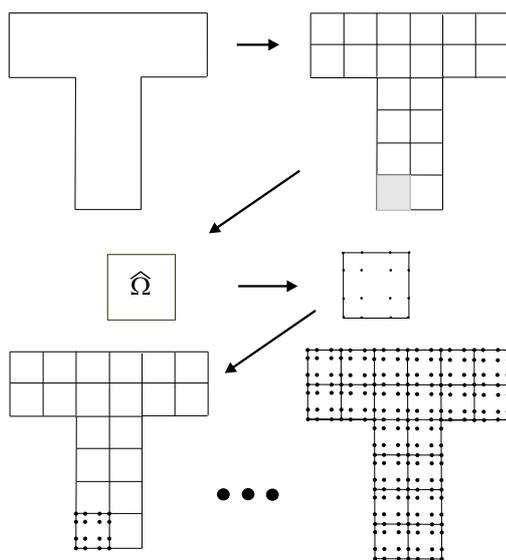
dove, ricordiamo,  $T_k$  è la trasformazione da  $\hat{\Omega}$  a  $\Omega_k$ . I pedici  $h, n$  mettono in evidenza la dipendenza delle funzioni di  $X_{h,n}(\Omega)$  dai due parametri:  $h$  la dimensione lineare dei quadrilateri, e  $n$ , il grado spettrale. E' utile inoltre introdurre lo spazio  $V$ , sottoinsieme di  $X_{h,n}(\Omega)$ , definito come:

$$V = \{v \in X_{h,n}(\Omega) : v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega\} \quad (4.4)$$

Gli spazi  $X_{h,n}(\Omega)$  e  $V$  sono approssimazioni di dimensione finita rispettivamente di  $H^1(\Omega)$  e del suo sottoinsieme  $H_0^1(\Omega)$  sottoinsieme di  $H^1(\Omega)$  costruito dalle funzioni che vanno a zero su  $\partial\Omega$ . Lo spazio degli elementi spettrali approssima la controparte di dimensione infinita con un'accuratezza che cresce seguendo i limiti  $h \rightarrow 0$  e/o  $n \rightarrow \infty$ . Questo processo di passaggio al limite fornisce soluzioni numeriche molto accurate. Questa è una differenza significativa rispetto agli elementi finiti, dove si può agire su un unico parametro (la spaziatura degli elementi  $h$ ) per aumentare la qualità della soluzione numerica.

Il passo successivo consiste nel definire le funzioni di base spettrali  $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ , tale che  $\psi_i \in V$ ,  $i = 1, \dots, N$  e

Figura 4.2: Come viene costruita la griglia spettrale mappando gli elementi nel quadrato di riferimento (caso con  $n = 3$ )



$$\psi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (4.5)$$

dove  $x_j$  sono i punti spettrali. Di conseguenza la restrizione delle funzioni di base spettrale ad un elemento  $\Omega_k$  o è un polinomio di Lagrange oppure viene eliminato.

Nel prossimo capitolo si vedrà che usando l'algoritmo dei minimi quadrati nel dominio della frequenza si ha la notevole esigenza di eseguire integrali e derivate su  $\Omega$ . Nel caso degli elementi spettrali, che segue l'approccio degli elementi finiti, queste operazioni vengono fatte nel quadrato di riferimento  $\hat{\Omega}$  piuttosto che nello spazio fisico  $\Omega$ . Oltretutto questo chiama esplicitamente in gioco la mappatura  $T_k$  adottata.

Risulta che una trasformazione semplice  $\mathbb{Q}_1(\hat{\Omega})$  è una buona scelta sia in termini di accuratezza che in termini di semplicità di generazione di griglia. In effetti una tale mappatura è semplicemente definita dai quattro vertici del quadrato generico; d'altra parte le trasformazioni di ordine elevato sfrutterebbero i nodi LGL tranne i vertici impedendo la semplice procedura di generazione della griglia descritta prima. Una tal scelta porta ad una mappatura sub-parametrica (il grado usato per la trasformazione, 1, è generalmente minore del grado spettrale  $n$ ) che è in ogni caso conosciuta per le buone proprietà matematiche (si veda ad esempio [6]).

Una volta definita la trasformazione, le derivate in  $\Omega_k$  possono essere valutate come:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1}{J_k(\hat{\mathbf{x}})} \left( \frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} - \frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{J_k(\hat{\mathbf{x}})} \left( \frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \right) \end{cases} \quad (4.6)$$

dove  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  e  $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  indicano coordinate in  $\Omega_k$  e  $\hat{\Omega}$  rispettivamente, e  $J_k(\hat{\mathbf{x}})$  è lo Jacobiano della trasformazione  $T_k$ . Le derivate nel dominio di riferimento sono calcolate in base ai valori della funzione da derivare nei nodi LGL del particolare elemento considerato. Questo è possibile farlo per mezzo della matrice collocativa delle derivate come è stato accenato nel paragrafo 2.1.5 (per i dettagli si veda [4], sec. 2.3).

Gli integrali fatti su  $\Omega$  vengono divisi in una somma di integrali su  $\Omega_k$ , ognuno valutato nel quadrato di riferimento  $\hat{\Omega}$ , in particolare

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega = \sum_k \int_{\Omega_k} f(\mathbf{x}) d\Omega = \sum_k \int_{\hat{\Omega}} \hat{f}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\Omega} \quad (4.7)$$

Alla fine gli integrali su  $\hat{\Omega}$  possono essere valutati numericamente sfruttando la formula di Legendre-Gauss-Lobatto unidimensionale:

$$\int_{-1}^1 \widehat{g}(\widehat{\xi}) d\widehat{\xi} \simeq \sum_{i=0}^n \widehat{g}(\widehat{\xi}_i) \widehat{\omega}_i \quad (4.8)$$

dove la forma esplicita dei pesi  $\widehat{\omega}_i$  è riportata in 2.29.

### 4.3 Uso degli elementi spettrali

Consideriamo il dominio chiuso e limitato  $\Omega$  di figura 3.2 come fatto nel precedente capitolo.

Consideriamo il seguente problema (Helmholtz)

$$\begin{cases} \nabla^2 u + k^2 u = F & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \rho & \text{su } \Gamma_N \end{cases} \quad (4.9)$$

come nel caso discusso nel precedente capitolo considereremo  $\varphi = 0$ . La forma debole (*weak form*) è

trovare  $u \in H_0^1(\Omega)$  con:

$$H_0^1(\Omega) \equiv \{u \in L^2(\Omega) : u_x \in L^2(\Omega), u_y \in L^2(\Omega), u = 0 \text{ su } \Gamma_D\} \quad (4.10)$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)$$

tale che:

$$-\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\Gamma_n} \rho v d\Omega + \int_{\Omega} k^2 u v d\Omega = \int_{\Omega} F v d\Omega \quad (4.11)$$

Come nel caso degli elementi finiti lo spazio in cui si cercano le soluzioni è di dimensione infinita, occorre pertanto costruire un sottospazio approssimante di dimensione finita. Suddividiamo il nostro dominio in elementi quadrangolari.

Consideriamo dunque il sottospazio  $V_h$  formato da quadrilateri elementari

$$V_h \subset H^1(\Omega) ; V_h \equiv \{v : v \in C^0(\Omega) \text{ e } |_{\Omega_k} \in \mathbb{Q}_1 \mathbb{Q}^1(\Omega_k)\} \quad (4.12)$$

e la trasformazione a cui abbiamo accennato prima:

$$\mathbb{Q}_1(\Omega_k) \equiv \{\alpha x + \beta y + \gamma xy + \delta, \quad (x, y) \in \Omega_k\} \quad (4.13)$$

un esempio di tale decomposizione è illustrato in figura 4.3

Il nostro problema iniziale (4.11) diventerà dunque:

$$\sum_{k=1}^{N_{el}} \left( - \int_{\Omega_k} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega_k + \int_{\Omega_k} k^2 u v \, d\Omega_k \right) = \sum_{k=1}^{N_{el}} \left( \int_{\Omega_k} F v \, d\Omega_k \right) \quad (4.14)$$

dove  $N_{el}$  è il numero di elementi della nostra discretizzazione. Se individuiamo con  $N_n$  il numero di nodi di tale discretizzazione abbiamo che la soluzione del nostro spazio può essere scritta tramite la formula di interpolazione di Lagrange (vedi 2.1.2) :

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{N_n} u_i \Psi_i(x, y) \quad (4.15)$$

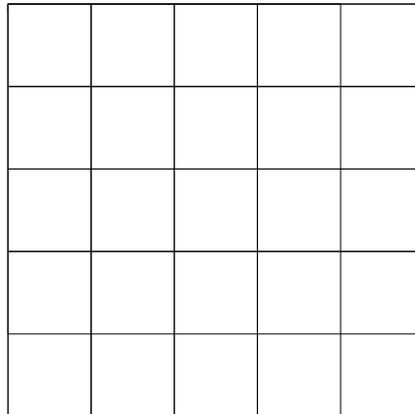
Con  $u_i$  costante da determinare mentre i  $\Psi_i(x, y)$  sono i polinomi di Lagrange. Il nostro problema si riconduce a trovare

$$\begin{cases} u_h \in V_h \\ u_h = \sum_{i=1}^{N_n} u_i \Psi_i(x, y) \text{ tali che } u_h = \varphi \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.16)$$

Se sfruttiamo il metodo di Galerkin le funzioni di base coincideranno con le funzioni di test cioè

$$v_j \equiv \Psi_j \quad (4.17)$$

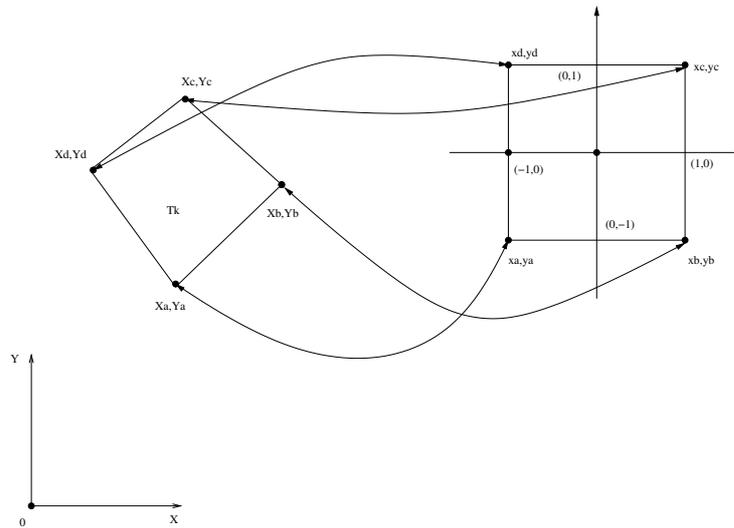
Figura 4.3: MeshQuadrangolare



$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_{el}} \left( - \int_{\Omega_k} \nabla u_i \cdot \nabla v_j d \Omega_k + \int_{\Omega_k} k^2 u_i v_j d \Omega_k \right) = \\ = \sum_{k=1}^{N_{el}} \left( \int_{\Omega_k} F v_j d \Omega_k \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

A differenza dei FEM, nel caso degli elementi spettrali occorre passare subito nel dominio trasformato. Facciamo dunque questa operazione descritta graficamente in figura 4.4.

Figura 4.4: Mappatura dei Quadrati



$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_{el}} \left( - \int_{\hat{\Omega}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) \nabla \hat{u}_i \cdot \nabla \hat{v}_j d \hat{\Omega}_k + \int_{\hat{\Omega}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) k^2 \hat{u}_i \hat{v}_j d \hat{\Omega}_k \right) = \\ = \sum_{k=1}^{N_{el}} \left( \int_{\hat{\Omega}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) \hat{F} \hat{v}_j d \hat{\Omega}_k \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

dove  $J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y})$  è lo jacobiano della trasformazione di coordinate. Tale trasformazione di coordinate è data da:

$$\begin{cases} x = \alpha_1 \hat{x} + \beta_1 \hat{y} + \gamma_1 \hat{x} \hat{y} + \delta_1 \\ y = \alpha_2 \hat{x} + \beta_2 \hat{y} + \gamma_2 \hat{x} \hat{y} + \delta_2 \end{cases} \quad (4.20)$$

Descriviamo i vecchi punti nelle nuove coordinate

$$\begin{cases} X_a = -\alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 \\ X_b = \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 + \delta_1 \\ X_c = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 \\ X_d = -\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 + \delta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{4}(X_a + X_b + X_c + X_d) \\ \beta_1 = \frac{1}{4}(-X_a + X_b + X_c - X_d) \\ \gamma_1 = \frac{1}{4}(X_a - X_b + X_c - X_d) \\ \delta_1 = \frac{1}{4}(-X_a - X_b + X_c + X_d) \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\begin{cases} Y_a = -\alpha_2 - \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 \\ Y_b = \alpha_2 - \beta_2 - \gamma_2 + \delta_2 \\ Y_c = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 \\ Y_d = -\alpha_2 + \beta_2 - \gamma_2 + \delta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \frac{1}{4}(Y_a + Y_b + Y_c + Y_d) \\ \beta_2 = \frac{1}{4}(-Y_a + Y_b + Y_c - Y_d) \\ \gamma_2 = \frac{1}{4}(Y_a - Y_b + Y_c - Y_d) \\ \delta_2 = \frac{1}{4}(-Y_a - Y_b + Y_c + Y_d) \end{cases} \quad (4.22)$$

A partire dalle coordinate dello spazio fisico si arriva alle coordinate del nuovo spazio, questo per ogni elemento della struttura che dobbiamo analizzare.

Vediamo le derivate; bisogna notare subito che trattandosi di funzioni composte bisogna derivare le funzioni come tali:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{y}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \end{cases} \quad (4.23)$$

Dopo qualche passaggio si arriva a definire gli operatori come:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J(\hat{x}, \hat{y})} \left( \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J(\hat{x}, \hat{y})} \left( \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right) \end{cases} \quad (4.24)$$

con

$$J(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \end{vmatrix} \quad (4.25)$$

eseguendo le derivate

$$J(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{vmatrix} (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}) & (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}) \\ (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}) & (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}) \end{vmatrix} \quad (4.26)$$

Sostituendo la (4.17) e la (4.15) avremo dunque:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{N_{el}} \left( - \int_{\widehat{\Omega}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) \sum_{i=1}^{N_n} \hat{u}_i \nabla \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \cdot \nabla \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y}) d\widehat{\Omega}_k + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\widehat{\Omega}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) k^2 \sum_{i=1}^{N_n} \hat{u}_i \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y}) d\widehat{\Omega}_k \right) = \\
& \quad = \sum_{k=1}^{N_{el}} \left( \int_{\widehat{\Omega}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) \widehat{F} \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y}) d\widehat{\Omega}_k \right) \quad (4.27)
\end{aligned}$$

riordinando si arriva a :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{N_{el}} \sum_{i=1}^{N_n} u_i \left( - \int_{\widehat{\Omega}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) \nabla \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \cdot \nabla \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y}) d\widehat{\Omega}_k + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\widehat{\Omega}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) k^2 \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y}) d\widehat{\Omega}_k \right) = \\
& \quad = \sum_{k=1}^{N_{el}} \left( \int_{\widehat{\Omega}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) \widehat{F} \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y}) d\widehat{\Omega}_k \right) \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Se indichiamo con:

$$\begin{cases} K_{i,j} = \int_{\widehat{\Omega}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) \nabla \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \cdot \nabla \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y}) d\widehat{\Omega}_k & \text{Matrice Di Stiffness} & i, j = 1..N_n \\ M_{i,j} = \int_{\widehat{\Omega}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) k \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y}) d\widehat{\Omega}_k & \text{Matrice Di Massa} & i, j = 1..N_n \\ F_i = \int_{\widehat{\Omega}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) \widehat{F} \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y}) d\widehat{\Omega}_k & \text{Termini Noti} & i = 1..N_n \end{cases} \quad (4.29)$$

abbiamo in definitiva

$$-K U + M U = F \quad (4.30)$$

Se poniamo

$$A = -K + M \quad (4.31)$$

otteniamo il sistema finale da risolvere

$$A U = F \quad (4.32)$$

### 4.3.1 Matrice di Stiffness

Esprimiamo adesso le varie matrici più in dettaglio, vediamo per prima la definizione della matrice di Stiffness:

Dato che:

$$K_{i,j} = \int_{\hat{\Omega}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) \nabla \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \cdot \nabla \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{\Omega}_k \quad (4.33)$$

$$\nabla \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} i_x + \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} i_y \quad (4.34)$$

si ha che:

$$\nabla \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \cdot \nabla \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} \quad (4.35)$$

ricordando le (4.24) si arriva poi a:

$$\nabla \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \cdot \nabla \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y})} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} & \left( \left( \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} \right) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} \right) \right) \quad (4.37) \end{aligned}$$

ricordando la trasformazione di coordinate (4.20) ed eseguendo le derivate si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} = \alpha_1 + \gamma_1 \hat{x} \\ \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} = \beta_1 + \gamma_1 \hat{y} \\ \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} = \alpha_2 + \gamma_2 \hat{x} \\ \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} = \beta_2 + \gamma_2 \hat{y} \end{cases} \quad (4.38)$$

sostituendo

$$\nabla \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \cdot \nabla \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y})}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}) \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}) \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} \right) \right. \\
& \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}) \frac{\partial \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}) \frac{\partial \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} \right) + \\
& \left. \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}) \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{x}) \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} \right) \right. \\
& \left. \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}) \frac{\partial \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{x}) \frac{\partial \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} \right) \right) \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Dobbiamo ora risolvere l'integrale e lo facciamo con le formule di Gauss Lobatto mostrate nel capitolo 2:

$$\int_{\hat{\Omega}_k} f^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{\Omega}_k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} \quad (4.40)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} = \sum_{l,m=0}^{N_{LGL}} f^{(k)}(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \hat{\omega}_{l,m} \quad (4.41)$$

in cui  $N_{LGL}$  è il numero di nodi di LGL che si stanno usando nel caso considerato. Bisogna notare che ci troviamo nel quadrato di riferimento abbiamo che il peso  $\hat{\omega}_{l,m}$  può essere scomposto nel prodotto di due pesi  $\hat{\omega}_l \hat{\omega}_m$ , stessa cosa per  $\hat{\Psi}_i(\hat{x}_l, \hat{y}_m)$  che può essere scomposto nel prodotto di due polinomi  $\Psi_i(\hat{x}_l) \Psi_i(\hat{y}_m)$ . Riprendiamo la (4.33) e applichiamo la (4.41):

$$\begin{aligned}
K_{i,j} = & \sum_{l,m=0}^{N_{LGL}} \left( \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}_l) \hat{\Psi}_i(\hat{y}_m)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}_l) \hat{\Psi}_i(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) \right. \\
& \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_j(\hat{x}_l) \hat{\Psi}_j(\hat{y}_m)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \frac{\partial \hat{\Psi}_j(\hat{x}_l) \hat{\Psi}_j(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) + \\
& \left. \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}_l) \hat{\Psi}_i(\hat{y}_m)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{x}) \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}_l) \hat{\Psi}_i(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_j(\hat{x}_l) \hat{\Psi}_j(\hat{y}_m)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_j(\hat{x}_l) \hat{\Psi}_j(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} K_{i,j} = & \sum_{l,m=0}^{N_{LGL}} \left( \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_i(\hat{y}_m) \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_i(\hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) \right. \\ & \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_j(\hat{y}_m) \frac{\partial \hat{\Psi}_j(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_j(\hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_j(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) + \\ & \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_i(\hat{y}_m) \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_i(\hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) \\ & \left. \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_j(\hat{y}_m) \frac{\partial \hat{\Psi}_j(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_j(\hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_j(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) \right) \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \quad (4.43) \end{aligned}$$

Nel precedente capitolo abbiamo mostrato che:

$$\frac{\partial \hat{f}(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} \simeq \sum_{k=0}^{N_{LGL}} D_{l,k} \hat{f}(\hat{x}_l) \quad (4.44)$$

dato che  $\hat{f} = \hat{\Psi}_i$  si ha che

$$\hat{\Psi}_i(\hat{x}_l) = \delta_{i,l} \quad (4.45)$$

e di conseguenza:

$$\frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} = D_{l,i} \quad (4.46)$$

Applichiamo la (4.46) e semplifichiamo

$$K_{i,j} = \sum_{l,m=0}^{N_{LGL}} \left( \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_i(\hat{y}_m) D_{l,i} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_i(\hat{x}_l) D_{m,i} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_j(\hat{y}_m) D_{l,j} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_j(\hat{x}_l) D_{m,j} \right) + \\
& + \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_i(\hat{y}_m) D_{l,i} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_i(\hat{x}_l) D_{m,i} \right) \\
& \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_j(\hat{y}_m) D_{l,j} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_j(\hat{x}_l) D_{m,j} \right) \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \quad (4.47)
\end{aligned}$$

possiamo semplificare ulteriormente ricordando che  $\hat{\Psi}_i(\hat{x}_l) = \delta_{i,l}$

$$\begin{aligned}
K_{i,j} &= \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{i,m} D_{l,i} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{i,l} D_{m,i} \right) \\
& \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{j,m} D_{l,j} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{j,l} D_{m,j} \right) + \\
& + \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{i,m} D_{l,i} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{i,l} D_{m,i} \right) \\
& \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{j,m} D_{l,j} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{j,l} D_{m,j} \right) \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \quad (4.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{i,j} &= \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{i,m} D_{l,i} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{i,l} D_{m,i} \right) \\
& \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{j,m} D_{l,j} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{j,l} D_{m,j} \right) + \\
& + \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{i,m} D_{l,i} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{i,l} D_{m,i} \right) \quad (4.49)
\end{aligned}$$

$$\left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{j,m} D_{l,j} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{j,l} D_{m,j} \right) \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned}
K_{i,j} &= \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{i,m} D_{l,i} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{i,l} D_{m,i} \right) \\
& \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{j,m} D_{l,j} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{j,l} D_{m,j} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{i,m} D_{l,i} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{i,l} D_{m,i}) \\
& ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{j,m} D_{l,j} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{j,l} D_{m,j}) \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m
\end{aligned} \tag{4.51}$$

semplificando

$$\begin{aligned}
K_{i,j} = & \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l)^2 \delta_{i,m} \delta_{j,m} D_{l,i} D_{l,j} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m - \right. \\
& - (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{i,m} D_{l,i} (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{j,l} D_{m,j} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m - \\
& - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{i,l} D_{m,i} (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{j,m} D_{l,j} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m + \\
& + (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m)^2 \delta_{i,l} \delta_{j,l} D_{m,i} D_{m,j} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m + \\
& + (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l)^2 \delta_{i,m} \delta_{j,m} D_{l,i} D_{l,j} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m - \\
& - (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{i,m} D_{l,i} (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{j,l} D_{m,j} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m - \\
& - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{i,l} D_{m,i} (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{j,m} D_{l,j} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m + \\
& \left. + (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m)^2 \delta_{i,l} \delta_{j,l} D_{m,i} D_{m,j} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right)
\end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}
K_{i,j} = & \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l)^2 D_{l,i} D_{l,i} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_l - \right. \\
& - (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_j) (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_i) D_{j,i} D_{i,j} \hat{\omega}_j \hat{\omega}_i - \\
& - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_j) (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_i) D_{j,i} D_{i,j} \hat{\omega}_i \hat{\omega}_j + \\
& \left. + (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m)^2 D_{m,i} D_{m,i} \hat{\omega}_i \hat{\omega}_m + \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l)^2 D_{l,i} D_{l,i} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_i - \\
& - (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_j) (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_i) D_{j,i} D_{i,j} \hat{\omega}_j \hat{\omega}_i - \\
& - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_j) (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_i) D_{j,i} D_{i,j} \hat{\omega}_i \hat{\omega}_j + \\
& + (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m)^2 D_{m,i} D_{m,i} \hat{\omega}_i \hat{\omega}_m
\end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
K_{i,j} = & \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( ((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l)^2 + (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l)^2) D_{l,i} D_{l,i} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_i + \right. \\
& + \left( (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m)^2 + (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m)^2 \right) D_{m,i} D_{m,i} \hat{\omega}_i \hat{\omega}_m - \\
& - ((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_j) (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_i) + (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_j) (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_i) + \\
& + (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_j) (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_i) - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_j) (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_i)) D_{j,i} D_{i,j} \hat{\omega}_j \hat{\omega}_i
\end{aligned} \tag{4.54}$$

possiamo usare un solo indice ad esempio l

$$\begin{aligned}
K_{i,j} = & \sum_{l=0}^{NLGL} \left( ((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l)^2 + (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l)^2 + \right. \\
& + (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_l)^2 + (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_l)^2) D_{l,i} D_{l,i} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_i + \\
& - ((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_j) (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_i) + (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_j) (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_i) + \\
& + (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_j) (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_i) - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_j) (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_i)) D_{j,i} D_{i,j} \hat{\omega}_j \hat{\omega}_i
\end{aligned} \tag{4.55}$$

la matrice risulterà completamente identificata a partire dalle coordinate fisiche dei nodi su cui incide quel particolare elemento considerato.

### 4.3.2 Matrice di Massa

La Matrice di Massa è stata definita come:

$$M_{i,j} = \int_{\hat{\Omega}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) k \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \hat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{\Omega}_k \quad (4.56)$$

risolviamo l'integrale con la (4.41)

$$M_{i,j} = \sum_{l,m=0}^{NLGL} J^{(k)}(\hat{x}_l, \hat{y}_m) k \hat{\Psi}_i(\hat{x}_l) \hat{\Psi}_i(\hat{y}_m) \hat{\Psi}_j(\hat{x}_l) \hat{\Psi}_j(\hat{y}_m) \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \quad (4.57)$$

$$M_{i,j} = \sum_{l,m=0}^{NLGL} J^{(k)}(\hat{x}_l, \hat{y}_m) k \delta_{i,l} \delta_{i,m} \delta_{j,l} \delta_{j,m} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \quad (4.58)$$

$$M_{i,i} = J^{(k)}(\hat{x}_i, \hat{y}_i) k \hat{\omega}_i^2 \quad (4.59)$$

### 4.3.3 Vettore dei Termini Noti

Il Vettore dei Termini Noti è stato definito come:

$$F_i = \int_{\hat{\Omega}_k} J^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) F(\hat{x}, \hat{y}) \hat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{\Omega}_k \quad (4.60)$$

integriamo:

$$F_i = \sum_{l,m=0}^{NLGL} J^{(k)}(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \hat{F} \hat{\Psi}_i(\hat{x}_l) \hat{\Psi}_i(\hat{y}_m) \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \quad (4.61)$$

$$F_i = \sum_{l,m=0}^{NLGL} J^{(k)}(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \hat{F} \delta_{i,l} \delta_{i,m} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \quad (4.62)$$

$$F_i = J^{(k)}(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \hat{F} \hat{\omega}_i^2 \quad (4.63)$$



# Capitolo 5

## Il Problema delle Soluzioni Spurie

---

*In questo capitolo descriveremo il problema dei modi spuri, problema che affligge la maggior parte delle formulazioni ad elementi finiti. Descrivremo inoltre il nostro approccio per eliminare tale problema, approccio che ci ha consentito di rendere il nostro algoritmo affidabile.*

### 5.1 I modi spuri

Uno dei limiti più gravi degli elementi finiti è la possibile insorgenza di modi spuri. Cerchiamo di capire inanzi tutto cosa sono i modi spuri.

Consideriamo un problema definito sul dominio rappresentato in figura 5.1 (si veda per dettagli [19]), in cui imponiamo un campo magnetico costante sul cilindro più esterno in modo da far sviluppare tutti i modi all'interno del dominio, la soluzione corretta calcolata analiticamente è quella di figura 5.2; come si può vedere in 5.3 il solutore produce una soluzione che appare fortemente corrotta in varie parti.

In alcune zone, e precisamente quelle in cui la condizione di divergenza non risulta omogenea il solutore produce soluzioni non fisiche. E' esattamente questo l'effetto di una soluzione spuria: dare origine a una soluzione non fisica.

Per nostra sfortuna questo effetto purtroppo si può notare (e neanche in tutti i casi) solo a simulazione conclusa e solamente quando si conosce a priori la forma della soluzione. Questo è un difetto ben noto ed è prerogativa dei metodi ad elementi finiti. E' per questo motivo che per lungo periodo questo metodo è stato usato per problemi elettromagnetici solo da una piccola parte della comunità scientifica. Infatti i solutori basati sul FEM producevano soluzioni non affidabili, che

Figura 5.1: Dominio

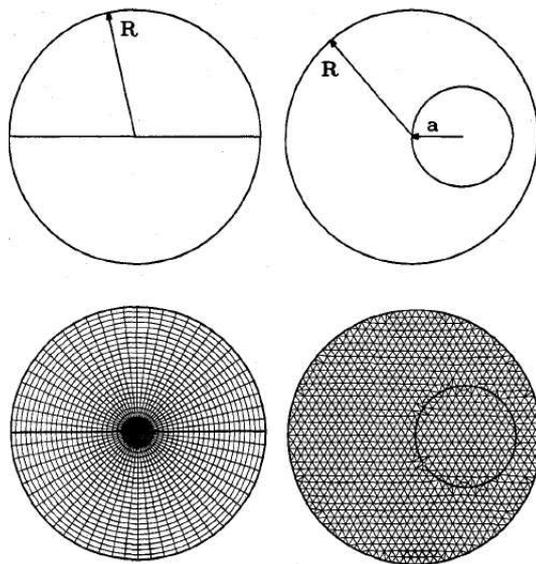


Figura 5.2: Soluzione Analitica

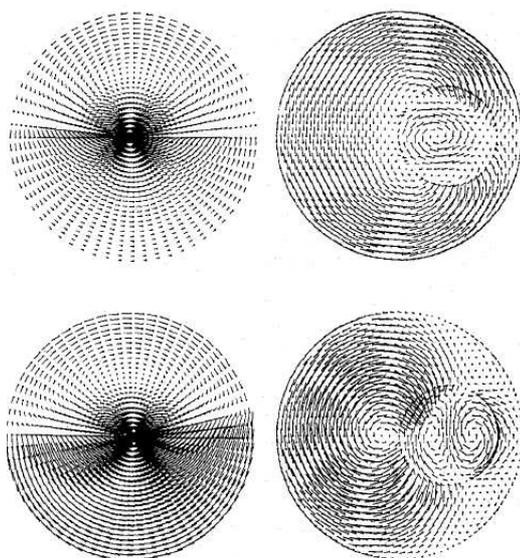
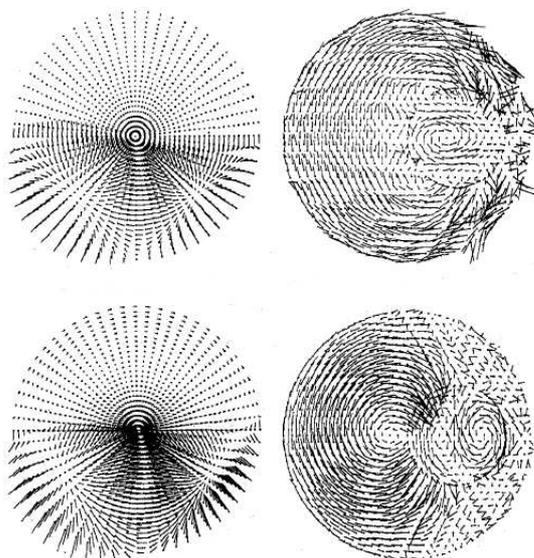


Figura 5.3: Soluzione Affetta da Modi Spuri



necessitavano di un attenta valutazione per accertarne l'attendibilità. Per questo motivo gran parte della comunità scientifica si è spostata verso altri metodi (quale ad esempio il già citato MOM); a causa di questo fatto lo sviluppo di metodi agli elementi finiti in elettromagnetismo è stata decisamente più lenta che non in altri campi come ad esempio l'analisi strutturale o termoelastica dove viene largamente usata e dove già da anni sono disponibili validissimi tool di calcolo (Ansys, Ideas, per fare i nomi dei più famosi).

Verso la fine degli anni 70 c'è stata una inversione di tendenza anche grazie agli studi di Nedelec [18], che si è occupato di ideare un nuovo tipo di elementi (gli elementi di Nedelec o di bordo); questi, creati appositamente per l'elettromagnetismo, sembravano almeno inizialmente avere risolto il problema e apportato diversi vantaggi nella creazione di solutori per elettromagnetismo basati sui FEM [31]. In molti si sono occupati di elaborare solutori e applicazioni basate sugli elementi di Nedelec e studi sono tuttora in corso. Uno dei vantaggi fondamentali di questa tecnica è che assicura la continuità della componente tangente del campo attraverso l'interfaccia tra due mezzi diversi, mentre lascia la componente normale libera di passare attraverso questa superficie; questa caratteristica semplifica molto la modellazione del campo [16]. Grazie a questo vantaggio questo tipo di elementi vengono utilizzati per modellare situazioni in cui il dominio è diviso in mezzi con proprietà elettromagnetiche diverse.

Bisogna notare che nel caso in cui si usi un approccio nodale il trattamento di que-

sto tipo di domini può essere comunque fatto, per tenere conto della discontinuità si ha però la necessità di duplicare i nodi presenti all'interfaccia tra i due mezzi.

Purtroppo l'approccio basato sugli elementi di Nedelec (o di bordo) offre alcuni vantaggi ma svariati svantaggi.

Uno di questi, la possibile comparsa di modi spuri; come dimostrato in un esempio in [17] gli elementi di Nedelec, che sembravano inizialmente avere tra le caratteristiche peculiari l'assenza di effetti spuri, possono comunque presentare questo problema, rendendo dunque l'approccio non affidabile.

Un'altra grave limitazione è che questi elementi possono essere usati solo nei casi in cui i campi siano a divergenza nulla, e questo, quando non si conosce a priori la forma della soluzione, può rappresentare un seria limitazione in termini di metodo "generale".

Varie formulazioni sono state proposte per risolvere il problema dei modi spuri alcune delle quali basati sui cosiddetti "penalty methods" in cui si cerca di "penalizzare" la possibile soluzione spuria con opportuni pesi dati alla formulazione debole del problema. Altre vie, studiate nel corso degli anni, consistono nel forzare a zero le funzioni di base in modo da ottenere divergenza nulla (si veda ad esempio [2, 5, 20]), altre ancora prevedono di utilizzare mesh strutturate in modo particolare onde evitare effetti spuri.

Un grosso limite presentato dagli approcci precedenti è la loro poca flessibilità, infatti essi prevedono di specificare la formulazione a elementi finiti a seconda del problema che si presenta di volta in volta.

Una strada alternativa che si può percorrere consiste nel modificare la forma debole del problema, questa via risulta più flessibile dei "penalty methods". Infatti usando questo approccio come mostrato in [19] inserire le condizioni al contorno risulta agevole, cosa che presenta non pochi problemi con gli approcci descritti in precedenza.

Come descritto in [17] la vera strada per eliminare i modi spuri consiste in una corretta formulazione agli elementi finiti. Teoria che concorda con quella descritta in [19] in cui la corretta formulazione consiste nel modificare opportunamente la forma debole.

Considerare la divergenza nulla a priori è uno dei limiti fondamentali di molti approcci, soprattutto quelli del secondo ordine in cui per eliminare uno dei due campi implicitamente si considera la divergenza nulla.

E' questa la vera causa dell'insorgenza delle soluzioni spurie, che sono soluzioni in cui la divergenza non è nulla.

## 5.2 Il nostro approccio al problema

Una formulazione a nostro parere più valida è quella ipotizzata in [8]. Gli autori indicano come causa principale delle soluzioni spurie una non corretta formulazione del problema, in accordo [19] e con [17], in cui si trascura di inserire le equazioni della divergenza.

Dal punto di vista fisico le equazioni della divergenza sono ridondanti, non aggiungono altre informazioni fisiche rispetto a quelle del rotore, ma esse contengono una grande informazione dal punto di vista numerico, e, come descritto dagli autori in [8], la perdita di queste informazioni è la vera responsabile delle soluzioni spurie. Da qui la necessità di modificare la formulazione generale del problema e modificare la forma debole dello stesso includendo entrambe le condizioni della divergenza.

Questo però pone un primo problema: infatti come già spiegato all'inizio includere queste equazioni non è semplice dal punto di vista numerico, infatti ci troviamo davanti ad un sistema con 8 equazioni scalari e solo 6 incognite, un tipico esempio di problema sovradeterminato.

Una possibile soluzione del problema è quella suggerita in [8] e cioè quello di utilizzare un approccio ai minimi quadrati lineari. Esso infatti può essere usato in tutte quelle situazioni in cui il numero delle equazioni è maggiore del numero delle incognite, esattamente il caso con cui stiamo lavorando.

E' nostra opinione che questo approccio, accoppiato con il metodo degli elementi spettrali, renda un solutore accurato ed affidabile e soprattutto esente da modi spuri.

Il nostro approccio il *Least Square Spectral Element Method (LSSEM)* si basa su questo assunto.



# Capitolo 6

## LSSEM: Caso Statico

---

*Illustriamo adesso la parte fondamentale del nostro lavoro: il Least Square Spectral Element Method (LSSEM), l'accoppiamento tra il metodo agli elementi spettrali (SEM) e il metodo dei minimi quadrati lineari (Least Square Method), applicato alle equazioni di Maxwell. In questo capitolo presenteremo un caso statico in cui i campi elettrico e magnetico risultano disaccoppiati, faremo inoltre un confronto di risultati con il classico Least Square Finite Element Method (LSFEM).*

### 6.1 Problema div-curl

Il least squares method (LSM) per gli elementi spettrali condivide una filosofia comune con il LSM per gli elementi finiti (per maggiori informazioni sulle applicazioni per elementi finiti vedere [8]).

Illustriamo inizialmente il caso statico per semplicità caso che trova applicazione in particolare nei fenomeni elettromagnetici a bassa frequenza, casi in cui si possono studiare separatamente i due problemi div-curl. Illustreremo di seguito un “modello” di tale problema che può rappresentare (con l’aggiunta delle opportune costanti) indifferentemente o il campo elettrico o quello magnetico.

Vediamo dunque il problema div-curl:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times u = \omega \quad in \quad \Omega \\ \nabla \cdot u = \rho \quad in \quad \Omega \\ n \cdot u = 0 \quad in \quad \Gamma_1 \\ n \times u = 0 \quad in \quad \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (6.1)$$

formulato per una regione  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  con una frontiera regolare data da:  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , con normale uscente  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ , in cui con  $u$  indichiamo il generico vettore rappresentante un campo magnetico o elettrico. Per semplicità in questo caso consideriamo una frontiera con condizioni omogenee sia per le condizioni di Dirichlet che per quelle di Neumann. Per definire un metodo ai minimi quadrati lineari per il problema precedente, introduciamo uno spazio

$$V \equiv \left\{ v \in [H^1(\Omega)]^2 \mid v \cdot n = 0 \text{ in } \Gamma_1 \text{ e } v \times n = 0 \text{ in } \Gamma_2 \right\} \quad (6.2)$$

e il funzionale reale  $I : V \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$I(w) \equiv \|\nabla \times u - \omega\|_0^2 \equiv \int_{\Omega} (\nabla \times u - \omega)^2 d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \cdot u - \rho)^2 d\Omega \quad (6.3)$$

Si definisce soluzione nel senso dei minimi quadrati il vettore  $u \in V$  tale che:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{d}{d\tau} I(u + \tau v) = 0 \quad \forall v \in V \quad (6.4)$$

Partiamo dalla forma bilineare

$$B(u, v) = \int_{\Omega} [(\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v) + (\nabla \cdot u) (\nabla \cdot v)] d\Omega \quad (6.5)$$

e da

$$L(v) = \int_{\Omega} [\omega \cdot (\nabla \times v) + \rho (\nabla \cdot v)] d\Omega \quad (6.6)$$

dobbiamo dunque risolvere il seguente problema trovare una  $u \in V$  tale che  $\forall v \in V$

$$B(u, v) = L(v) \quad (6.7)$$

Applichiamo il metodo di Galerking e poniamo  $u=v$ , (poniamo cioè le funzioni di base uguali a quelle di test), passimo a

$$\sum_{j=1}^N u_j B(\Psi_i, \Psi_j) = \sum_{j=1}^N L(\Psi_j) \quad (6.8)$$

La base che andiamo a scegliere è la seguente

$$\{\Psi_1, \dots, \Psi_n\} = \begin{cases} (\Psi_i, 0) & \forall i = 1, \dots, \hat{N} & \{1\} \\ (0, \Psi_i) & \forall i = 1, \dots, \hat{N} & \{2\} \\ (-n_{2_i} \Psi_i, n_{1_i} \Psi_i) & \forall i = 1, \dots, N_{\Gamma_1} & \{3\} \\ (n_{1_i} \Psi_i, n_{2_i} \Psi_i) & \forall i = 1, \dots, N_{\Gamma_2} & \{4\} \end{cases} \quad (6.9)$$

specifichiamo un p meglio la notazione:

- $N_n$  è il numero di grid point della regione in esame,
- $\hat{N}$  è il numero di grid point interni,
- $N_{\Gamma_1}$  è il numero di grid point che risiedono sulla parte di frontiera indicata come  $\Gamma_1$ ,
- $N_{\Gamma_2}$  è l'analogo per la parte di frontiera indicata come  $\Gamma_1$ .

Dato che per ogni punto interno abbiamo due gradi di libertà (uno lungo la direzione  $x$  e uno lungo la direzione  $y$ ), mentre per ogni punto sulla frontiera ne abbiamo uno solo, abbiamo in definitiva che:

$$N_n = 2\hat{N} + N_{\Gamma_1} + N_{\Gamma_2} \quad (6.10)$$

di conseguenza la forma della soluzione che dobbiamo cercare è la seguente:

$$\begin{aligned} u(x) = & \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(x)}(\Psi_j, 0) + \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(y)}(0, \Psi_j) + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_1}} u_j^{(\Gamma_1)}(-n_{2_j} \Psi_j, n_{1_j} \Psi_j) + \\ & + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_2}} u_j^{(\Gamma_2)}(n_{1_j} \Psi_j, n_{2_j} \Psi_j) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Una cosa importante da notare è che con questa formulazione stiamo dicendo che la nostra soluzione deve rispettare le condizioni al contorno che abbiamo impostato all'inizio, quindi non abbiamo bisogno di ulteriori imposizioni sulla frontiera.

Per i dettagli riguardanti la formulazione sviluppata si veda l'appendice A.

## 6.2 Validazione dei risultati

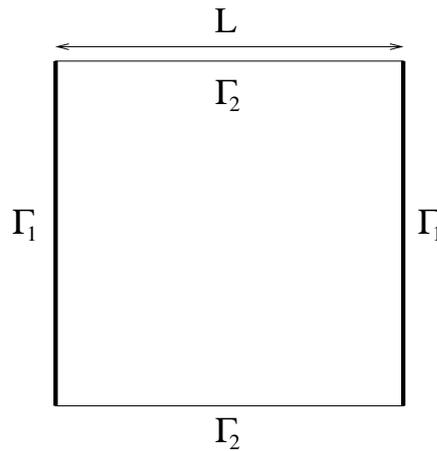
### 6.2.1 Soluzione Analitica Per il Problema DivCurl

Il problema divcurl può essere espresso come

$$\begin{cases} \nabla \times u = \omega & \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot u = \rho & \text{in } \Omega \\ n \cdot u = 0 & \text{in } \Gamma_1 \\ n \times u = 0 & \text{in } \Gamma_2 \end{cases} \quad (6.12)$$

Consideriamo un dominio quadrato di lato  $L$ , consideriamo come  $\Gamma_1$  i due lati verticali, come  $\Gamma_2$  i due lati orizzontali (si veda la figura 6.1).

Figura 6.1: Dominio Quadrato



Vediamo di soddisfare le due condizioni al contorno. Se consideriamo come origine degli assi il vertice del quadrato in basso a sinistra abbiamo

- in  $x = 0$  il vettore normale è  $n = -\hat{x} + \hat{y}$ ,
- in  $x = L$  il vettore normale è  $n = \hat{x} + \hat{y}$ ,

di conseguenza si ha:

$$\begin{cases} -u \cdot \hat{x} = -u_1(x, y) = 0 & \text{su } x = 0 \\ u \cdot \hat{x} = u_1(x, y) = 0 & \text{su } x = L \end{cases} \quad (6.13)$$

Una funzione che soddisfa queste condizioni al contorno è

$$\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (6.14)$$

allo stesso modo per la condizione sul rotore si ha

$$\begin{cases} n \times u = u_1(x, y) = 0 & \text{su } y = 0 \\ n \times u = -u_1(x, y) = 0 & \text{su } y = L \end{cases} \quad (6.15)$$

Una funzione che soddisfa queste condizioni al contorno è

$$\sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \quad (6.16)$$

Una possibile soluzione analitica è dunque:

$$u_1(x, y) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \quad (6.17)$$

Per non lasciare completamente libera la componente  $u_2$  (potrebbe causare problemi in debug), la fissiamo senza perdere in generalità come:

$$u_2(x, y) = \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \quad (6.18)$$

La soluzione  $u(x, y)$  risulta definita come:

$$u(x, y) = \left( \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \right) \quad (6.19)$$

I termini noti andranno fissati a

$$\begin{aligned} \omega = \nabla \times u &= \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{2\pi}{L} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) - \\ &\quad - \frac{2\pi}{L} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\omega = -\frac{4\pi}{L} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \quad (6.21)$$

e

$$\begin{aligned} \rho = \nabla \cdot u &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{2\pi}{L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) - \\ &\quad - \frac{2\pi}{L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\rho = 0 \quad (6.23)$$

## 6.2.2 Confronto tra LSFEM e LSSEM

Abbiamo sviluppato due solutori ai minimi quadrati per il problema div-curl, uno basato su elementi finiti (LSFEM), e uno basato su elementi spettrali (LSSEM). Di seguito illustriamo le prove numeriche sui due metodi effettuate su uno stesso dominio, ed evidenzieremo le principali differenze in termini di precisione dei risultati che si possono raggiungere.

Come si è visto nel paragrafo 3.4.8 per validare un metodo numerico occorre confrontare i suoi risultati con una soluzione nota a priori e testare la sua convergenza rispetto al decrescere del passo della griglia secondo la 3.57 e la 3.58. Nel caso degli elementi spettrali abbiamo:

$$\|u - u_{h,n}\|_1 \leq c e^{-n} h^n \|u\|_r \quad (6.24)$$

dove:

- $c$  è una costante che non dipende da  $u$  e  $h$ ,
- $n$  è il grado spettrale,
- $h$  è il passo medio della griglia.

La norma viene valutata su  $L^2(\Omega)$  (la norma di questo spazio). Per quanto detto nel paragrafo 3.4.8 anche l'errore sulla divergenza deve scalare secondo una legge ben precisa. In particolare, infatti, poichè la 6.24 è un vincolo su  $\|\cdot\|_1$  essa fornisce anche una stima dell'errore per lo spazio delle derivate e di conseguenza per la divergenza.

Di seguito vediamo due grafici in figura 6.2 e in figura 6.3 in cui vediamo rispettivamente l'andamento dell'errore in norma  $L^2(\Omega)$  in due casi. In figura 6.2 vediamo l'andamento dell'errore al decrescere del passo di griglia nel caso in cui per la soluzione del problema div-curl sia stato usato un solutore agli elementi finiti (sviluppato a scopo di testing precedentemente a quello agli elementi spettrali presentato in questo capitolo), mentre in figura 6.3 possiamo vedere l'andamento del solutore spettrale descritto nel capitolo.

Per le prove come dominio abbiamo usato un quadrato regolare e come condizioni al contorno abbiamo imposto per semplicità e senza perdita di generalità condizioni di Dirichlet dappertutto, sia nel caso LSFEM che nel caso LSSEM, come soluzione di confronto è stata usata la soluzione calcolata nel paragrafo precedente.

Come possiamo notare in entrambi i casi la legge di convergenza rispettivamente, 3.57 e la 3.58 per gli elementi finiti e 6.24 per gli spettrali, vengono rispettate e in entrambi i casi l'errore scala linearmente rispetto al passo della griglia in figura in 6.2 e rispetto al grado spettrale in figura 6.3.

Bisogna tuttavia notare la migliore convergenza del LSSEM rispetto al LSFEM a parità di passo di griglia (e quindi di memoria e di risorse utilizzate), migliore convergenza che è altresì ricavabile a partire dalle due definizioni di errore 3.57 e 6.24.

Bisogna inoltre notare la grande precisione a cui si giunge con gli spettrali. Infatti nel caso LSFEM di figura 6.2, anche con un passo di griglia molto fitto, si arriva ad un errore di  $10^{-3}$ . Nel caso LSSEM di figura 6.3 tale valore si raggiunge già con grado spettrale due fino ad arrivare a valori di errore pari a  $10^{-8}$ . Da qui si vede l'elevata accuratezza del metodo da noi utilizzato.

E' ovvio che errori di  $10^{-8}$  sono sovrabbondanti. Se osserviamo le due figure 6.2 e 6.3, e se prestiamo attenzione al fatto che in figura 6.3 il passo di griglia è fisso e pari a 20, si vede che con il LSSEM si possono ottenere le accuratezze richieste (ad es.  $10^{-3}$ ) con passi di griglia decisamente più piccoli rispetto a quelli usati con il LSFEM, con un risparmio di risorse e di tempo.

Figura 6.2: Grafico della convergenza (Caso Statico)

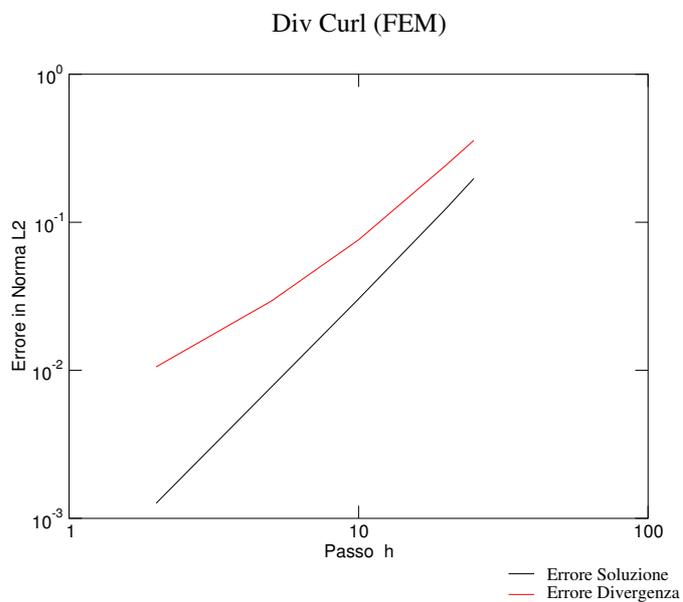
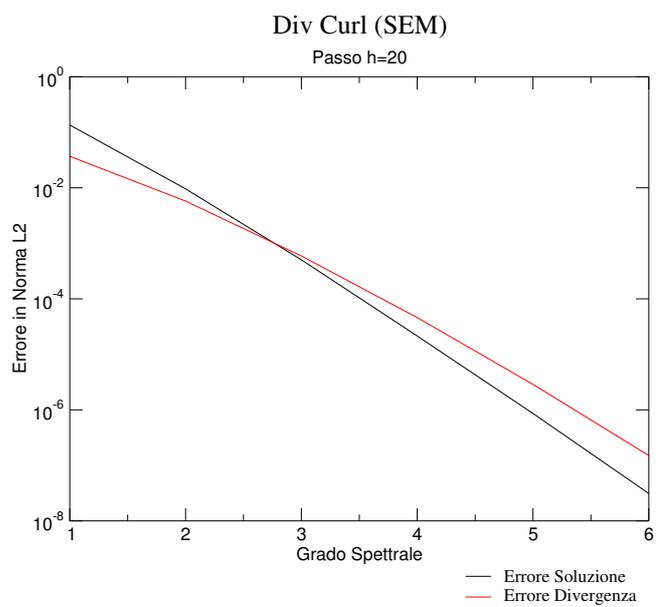


Figura 6.3: Grafico della convergenza spettrale (Caso Statico)



# Capitolo 7

## LSSEM : Equazioni di Maxwell

---

*Illustriamo adesso la parte relativa allo scopo iniziale del nostro lavoro, realizzare un solutore per le equazioni di Maxwell, basato sugli elementi spettrali ed esente da modi spuri. Illustreremo la formulazione e la validazione dei risultati.*

### 7.1 Caso elettromagnetico: problema accoppiato

Consideriamo le equazioni di Maxwell del primo ordine nel dominio della frequenza:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times H = j\omega \varepsilon E + J_e & \text{Legge di Faraday - Neumann} \\ \nabla \times E = -M_e - j\omega \mu H & \text{Legge di Maxwell - Ampere} \\ \nabla \cdot \varepsilon E = \rho_e & \text{Legge di Gauss (CE)} \\ \nabla \cdot \mu H = \rho_m & \text{Legge di Gauss (CM)} \end{array} \right. \quad (7.1)$$

abbiamo considerato il problema nel dominio della frequenza per un motivo fondamentale. Nel dominio della frequenza non compaiono le derivate rispetto al tempo, questo rende più agevole la formulazione. Infatti nel caso in cui nelle formulazioni a elementi spettrali compaia una derivata temporale, generalmente il tutto si risolve usando uno schema alle differenze finite in cui la variabile di riferimento è il tempo. Il tutto non risulta particolarmente difficile ma in questo caso è evitabile passando nel dominio della frequenza.

Nel caso in cui si rendessero necessari i risultati nel dominio del tempo questi sarebbero facilmente ricavabili a partire da quelli nel dominio della frequenza usando

una IFFT il cui algoritmo fornisce i risultati in tempi ragionevoli e con uno sforzo computazionale minimo (per una panoramica sull'utilizzo degli elementi finiti nel dominio del tempo si veda ad esempio [15]).

Consideriamo per semplicità e senza perdita di generalità il caso TE per il problema 7.1:

$$\begin{aligned} \text{Campo magnetico} \quad \overline{H}(x, z) &= H_x(x, z) \overline{i}_x + H_z(x, z) \overline{i}_z \\ \text{Campo elettrico} \quad \overline{E}(x, z) &= E_y(x, z) \overline{i}_y \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \text{Corrente magnetica} \quad \overline{J}_m(x, z) &= J_{mx}(x, z) \overline{i}_x + J_{mz}(x, z) \overline{i}_z \\ \text{Corrente elettrica} \quad \overline{J}_e(x, z) &= J_{ex}(x, z) \overline{i}_y \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Densità di carica magnetica} \quad \rho_m(x, z) \\ \text{Densità di carica elettrica} \quad \rho(x, z) \end{aligned} \quad (7.4)$$

In questo caso il dominio  $\Omega$  è un dominio  $2D$  situato nel piano  $x - z$ , in questo caso il nostro algoritmo dovrà essere formulato con incognite a 3 gradi di libertà in campo complesso (o, equivalentemente, 6 gradi di libertà in campo reale). Nel seguito indicheremo una quantità complessa generica  $A$  nel seguente modo:

$$A = A^{(r)} + j A^{(i)} \quad (7.5)$$

dove  $A^{(r)}$  e  $A^{(i)}$  sono rispettivamente la parte reale e immaginaria.

In  $\partial\Omega$ , contorno di  $\Omega$ , che supponiamo essere regolare e con normale uscente data da  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  e con vettore tangente  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$ , consideriamo le seguenti condizioni al contorno:

Conduttore elettrico perfetto (CEP)

$$C.E.P. \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow E_t = 0, & \frac{\partial E_n}{\partial n} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0 \Rightarrow H_n = 0, & \frac{\partial H_t}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

Conduttore magnetico perfetto (CMP)

$$C.M.P. \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0 \Rightarrow H_t = 0, & \frac{\partial H_n}{\partial n} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 0 \Rightarrow E_n = 0, & \frac{\partial E_t}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (7.7)$$

Formuliamo il problema per una regione  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  con una frontiera regolare  $\Omega$ , con normale uscente  $n = (n_1, n_2)$ . Definiamo un metodo ai minimi quadrati lineari per il problema precedente, definiamo uno spazio (ipotizziamo per il momento condizioni di campo nullo sul contorno)

$$V \equiv \left\{ v(\tilde{E}, \tilde{H}) \in [H^1(\Omega)]^2 \mid v(\tilde{E}, \tilde{H}) = 0 \text{ in } \partial\Omega \right\} \quad (7.8)$$

dove con  $v(\tilde{E}, \tilde{H})$  indichiamo la nostra soluzione di test, e il funzionale reale  $I : V \rightarrow \mathbb{R}$ , così fatto:

$$\begin{aligned} I(E, H) \equiv & \|\nabla \times H - j\omega \varepsilon E - J_e\|_0^2 + \|\nabla \times E + M_e + j\omega \mu H\|_0^2 + \\ & + \|\nabla \cdot \mu H - \rho_m\|_0^2 + \|\nabla \cdot \varepsilon E - \rho_e\|_0^2 \equiv \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \equiv & \int_{\Omega} (\nabla \times H - j\omega \varepsilon E - J_e)^2 d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \times E + M_e + j\omega \mu H)^2 d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mu H - \rho_m)^2 + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \varepsilon E - \rho_e)^2 d\Omega \end{aligned} \quad (7.10)$$

Si definisce soluzione nel senso dei minimi quadrati il vettore  $u(E, H) \in V$  tale che:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{d}{d\tau} I(u(E, H) + \tau v(\tilde{E}, \tilde{H})) = 0 \quad \forall v(\tilde{E}, \tilde{H}) \in V \quad (7.11)$$

Dobbiamo dunque risolvere il seguente problema trovare una  $u(E, H) \in V$  tale che  $\forall v(\tilde{E}, \tilde{H}) \in V$

$$B(u(E, H), v(\tilde{E}, \tilde{H})) = L(v(\tilde{E}, \tilde{H})) \quad (7.12)$$

Partiamo dalla forma bilineare

$$\begin{aligned} B(u(E, H), v(\tilde{E}, \tilde{H})) = & \int_{\Omega} \left[ (\nabla \times H - j\omega \varepsilon E) \left( \nabla \times \tilde{H} - j\omega \varepsilon \tilde{E} \right) + \right. \\ & \left. + (\nabla \times E + j\omega \mu H) \left( \nabla \times \tilde{E} + j\omega \mu \tilde{H} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\nabla \cdot \mu H) (\nabla \cdot \mu \tilde{H}) + \\
& + (\nabla \cdot \varepsilon E) (\nabla \cdot \varepsilon \tilde{E}) + \int d\Omega
\end{aligned} \tag{7.13}$$

e da

$$\begin{aligned}
L(v(\tilde{E}, \tilde{H})) = \int_{\Omega} \left[ J_e (\nabla \times \tilde{H} - j\omega \varepsilon \tilde{E}) - M_e (\nabla \times \tilde{E} + j\omega \mu \tilde{H}) + \right. \\
\left. + \rho_m (\nabla \cdot \mu \tilde{H}) + \rho_e (\nabla \cdot \varepsilon \tilde{E}) \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Applichiamo il metodo di Galerking e poniamo le funzioni di base uguali a quelle di test, otteniamo dunque:

$$\sum_{j=1}^N u_j B(\Psi_i, \Psi_j) = \sum_{j=1}^N L(\Psi_i) \tag{7.15}$$

La base che andiamo a scegliere è la seguente:

Parte reale ( $H_x, H_z, E_y$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Psi_i, 0, 0, 0, 0, 0) \quad \forall i = 1, \dots, \hat{N} \\ (0, \Psi_i, 0, 0, 0, 0) \quad \forall i = 1, \dots, \hat{N} \\ (0, 0, \Psi_i, 0, 0, 0) \quad \forall i = 1, \dots, \hat{N} \end{array} \right. \tag{7.16}$$

Parte immaginaria ( $H_x, H_z, E_y$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} (0, 0, 0, \Psi_i, 0, 0) \quad \forall i = 1, \dots, \hat{N} \\ (0, 0, 0, 0, \Psi_i, 0) \quad \forall i = 1, \dots, \hat{N} \\ (0, 0, 0, 0, 0, \Psi_i) \quad \forall i = 1, \dots, \hat{N} \end{array} \right. \tag{7.17}$$

specifichiamo un p meglio la notazione:

- $N_n$  è il numero di grid point della regione in esame,
- $\hat{N}$  è il numero di grid point interni.

di conseguenza la forma della soluzione che dobbiamo cercare è la seguente:

$$\begin{aligned}
u(x, y) = & \sum_{j=1}^{\hat{N}} Rh_j^{(x)}(\Psi_i, 0, 0, 0, 0, 0) + \sum_{j=1}^{\hat{N}} Rh_j^{(z)}(0, \Psi_i, 0, 0, 0, 0) + \\
& + \sum_{j=1}^{\hat{N}} Re_j^{(y)}(0, 0, \Psi_i, 0, 0, 0) + \\
& + j \sum_{j=1}^{\hat{N}} Ih_j^{(x)}(0, 0, 0, \Psi_i, 0, 0) + j \sum_{j=1}^{\hat{N}} Ih_j^{(z)}(0, 0, 0, 0, \Psi_i, 0) + \\
& + j \sum_{j=1}^{\hat{N}} Ie_j^{(y)}(0, 0, 0, 0, 0, \Psi_i)
\end{aligned} \tag{7.18}$$

dove con  $Rh_j^{(x)}(\Psi_i, 0, 0, 0, 0, 0)$  si indica la parte reale della componente x del campo magnetico nel punto  $j$ , con  $Ih_j^{(x)}(0, 0, 0, \Psi_i, 0, 0)$  la parte immaginaria della componente x del campo magnetico nello stesso punto, analoga notazione viene usata per la componente z reale e immaginaria, e per la componente y del campo elettrico.

Riscriviamo la forma bilineare separando parte reale e parte immaginaria.  $E = E_r + jE_i, H = H_r + jH_i$

$$\begin{aligned}
B(u(E, H), v(\tilde{E}, \tilde{H})) = & \int_{\Omega} [(\nabla \times (H_r + jH_i) - j\omega \varepsilon (E_r + jE_i)) \\
& (\nabla \times (\tilde{H}_r + j\tilde{H}_i) - j\omega \varepsilon (\tilde{E}_r + j\tilde{E}_i))] + \\
& + (\nabla \times (E_r + jE_i) + j\omega \mu (H_r + jH_i)) (\nabla \times (\tilde{E}_r + j\tilde{E}_i) + j\omega \mu (\tilde{H}_r + j\tilde{H}_i)) + \\
& + (\nabla \cdot \mu (H_r + jH_i)) (\nabla \cdot \mu (\tilde{H}_r + j\tilde{H}_i)) + \\
& + (\nabla \cdot \varepsilon (E_r + jE_i)) (\nabla \cdot \varepsilon (\tilde{E}_r + j\tilde{E}_i) \tilde{E})] d\Omega
\end{aligned} \tag{7.19}$$

separiamo parte reale e immaginaria

$$\begin{aligned}
B(u(E, H), v(\tilde{E}, \tilde{H})) &= \int_{\Omega} [(\nabla \times H_r + j\nabla \times H_i - j\omega \varepsilon E_r + \omega \varepsilon E_i) \\
&\quad (\nabla \times \tilde{H}_r + j\nabla \times \tilde{H}_i - j\omega \varepsilon \tilde{E}_r + \omega \varepsilon \tilde{E}_i) + \\
&\quad + (\nabla \times E_r + j\nabla \times E_i + j\omega \mu H_r - \omega \mu H_i) \\
&\quad (\nabla \times \tilde{E}_r + j\nabla \times \tilde{E}_i + j\omega \mu \tilde{H}_r - \omega \mu \tilde{H}_i) + \\
&\quad + (\mu \nabla \cdot H_r + j\mu \nabla \cdot H_i) (\mu \nabla \cdot \tilde{H}_r + j\mu \nabla \cdot \tilde{H}_i) + \\
&\quad + (\varepsilon \nabla \cdot E_r + j\varepsilon \nabla \cdot E_i) (\varepsilon \nabla \cdot \tilde{E}_r + j\varepsilon \nabla \cdot \tilde{E}_i)] d\Omega \quad (7.20)
\end{aligned}$$

riordinando

$$\begin{aligned}
B(u(E, H), v(\tilde{E}, \tilde{H})) &= \int_{\Omega} [(\nabla \times H_r + \omega \varepsilon E_i + j(\nabla \times H_i - \omega \varepsilon E_r)) \\
&\quad (\nabla \times \tilde{H}_r + \omega \varepsilon \tilde{E}_i + j(\nabla \times \tilde{H}_i - \omega \varepsilon \tilde{E}_r)) + \\
&\quad + (\nabla \times E_r - \omega \mu H_i + j(\nabla \times E_i + \omega \mu H_r)) \\
&\quad (\nabla \times \tilde{E}_r + -\omega \mu \tilde{H}_i + j(\nabla \times \tilde{E}_i + \omega \mu \tilde{H}_r)) + \\
&\quad + (\mu \nabla \cdot H_r + j\mu \nabla \cdot H_i) (\mu \nabla \cdot \tilde{H}_r + j\mu \nabla \cdot \tilde{H}_i) + \\
&\quad + (\varepsilon \nabla \cdot E_r + j\varepsilon \nabla \cdot E_i) (\varepsilon \nabla \cdot \tilde{E}_r + j\varepsilon \nabla \cdot \tilde{E}_i)] d\Omega \quad (7.21)
\end{aligned}$$

Svolgiamo i prodotti

$$\begin{aligned}
B(u(E, H), v(\tilde{E}, \tilde{H})) = & \int_{\Omega} \left[ (\nabla \times H_r) (\nabla \times \tilde{H}_r) + (\nabla \times H_r) (\omega \varepsilon \tilde{E}_i) + \right. \\
& + j (\nabla \times H_r) (\nabla \times \tilde{H}_i) - j (\nabla \times H_r) (\omega \varepsilon \tilde{E}_r) + \\
& + (\omega \varepsilon E_i) (\nabla \times \tilde{H}_r) + (\omega \varepsilon E_i) (\omega \varepsilon \tilde{E}_i) + \\
& + j (\omega \varepsilon E_i) (\nabla \times \tilde{H}_i) - j (\omega \varepsilon E_i) (\omega \varepsilon \tilde{E}_r) + \\
& + j (\nabla \times H_i) (\nabla \times \tilde{H}_r) + j (\nabla \times H_i) (\omega \varepsilon \tilde{E}_i) - \\
& - (\nabla \times H_i) (\nabla \times \tilde{H}_i) + j (\nabla \times H_i) (\omega \varepsilon \tilde{E}_r) + \\
& - j (\omega \varepsilon E_r) (\nabla \times \tilde{H}_r) - j (\omega \varepsilon E_r) (\omega \varepsilon \tilde{E}_i) + \\
& + (\omega \varepsilon E_r) (\nabla \times \tilde{H}_i) - (\omega \varepsilon E_r) (\omega \varepsilon \tilde{E}_r) + \\
& + (\nabla \times E_r) (\nabla \times \tilde{E}_r) - (\nabla \times E_r) (\omega \mu \tilde{H}_i) + \\
& + j (\nabla \times E_r) (\nabla \times \tilde{E}_i) + j (\nabla \times E_r) (\omega \mu \tilde{H}_r) + \\
& - (\omega \mu H_i) (\nabla \times \tilde{E}_r) + (\omega \mu H_i) (\omega \mu \tilde{H}_i) - \\
& - j (\omega \mu H_i) (\nabla \times \tilde{E}_i) - j (\omega \mu H_i) (\omega \mu \tilde{H}_r) + \\
& + j (\nabla \times E_i) (\nabla \times \tilde{E}_r) - j (\nabla \times E_i) (\omega \mu \tilde{H}_i) - \\
& - (\nabla \times E_i) (\nabla \times \tilde{E}_i) - (\nabla \times E_i) (\omega \mu \tilde{H}_r) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +j(\omega \mu H_r) (\nabla \times \tilde{E}_r) - j(\omega \mu H_r) (\omega \mu \tilde{H}_i) - \\
& - (\omega \mu H_r) (\nabla \times \tilde{E}_i) - (\omega \mu H_r) (\omega \mu \tilde{H}_r) + \\
& + (\mu \nabla \cdot H_r) (\mu \nabla \cdot \tilde{H}_r) + j(\mu \nabla \cdot H_r) (\mu \nabla \cdot \tilde{H}_i) + \\
& + j(\mu \nabla \cdot H_i) (\mu \nabla \cdot \tilde{H}_r) - (\mu \nabla \cdot H_i) (\mu \nabla \cdot \tilde{H}_i) + \\
& + (\varepsilon \nabla \cdot E_r) (\varepsilon \nabla \cdot \tilde{E}_r) + j(\varepsilon \nabla \cdot E_r) (\varepsilon \nabla \cdot \tilde{E}_i) + \\
& + j(\varepsilon \nabla \cdot E_i) (\varepsilon \nabla \cdot \tilde{E}_r) - (\varepsilon \nabla \cdot E_i) (\varepsilon \nabla \cdot \tilde{E}_i) \Big] d\Omega \quad (7.22)
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il termine noto abbiamo:

$$\begin{aligned}
L(v(\tilde{E}, \tilde{H})) = \int_{\Omega} \Big[ & J_e \nabla \times \tilde{H}_r + J_e \omega \varepsilon \tilde{E}_i - M_e \nabla \times \tilde{E}_r + \\
& + M_e \omega \mu \tilde{H}_i + \rho_m \mu \nabla \cdot \tilde{H}_r + \rho_e \varepsilon \nabla \cdot \tilde{E}_r + \\
& + j \left( J_e \nabla \times \tilde{H}_i - J_e \omega \varepsilon \tilde{E}_r - M_e \nabla \times \tilde{E}_i - M_e \omega \mu \tilde{H}_r + \right. \\
& \left. + \rho_m \mu \nabla \cdot \tilde{H}_i + \rho_e \varepsilon \nabla \cdot \tilde{E}_i \right) \Big] d\Omega \quad (7.23)
\end{aligned}$$

dividiamo in parte reale ed immaginaria:

$$\begin{aligned}
B(u(E, H), v(\tilde{E}, \tilde{H})) = \int_{\Omega} \Big[ & \nabla \times H_r \nabla \times \tilde{H}_r + \nabla \times E_r \nabla \times \tilde{E}_r - \\
& - \nabla \times H_i \nabla \times \tilde{H}_i - \nabla \times E_i \nabla \times \tilde{E}_i + \\
& + \omega \varepsilon \nabla \times H_r \tilde{E}_i + \omega \varepsilon E_i \nabla \times \tilde{H}_r + \omega \varepsilon E_r \nabla \times \tilde{H}_i +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\omega \mu H_r \nabla \times \tilde{E}_i - \omega \mu H_i \nabla \times \tilde{E}_r + \\
& -\omega \mu \nabla \times E_r \tilde{H}_i - \omega \mu \nabla \times E_i \tilde{H}_r + \\
& + (\omega \varepsilon)^2 E_i \tilde{E}_i - (\omega \mu)^2 H_r \tilde{H}_r + (\omega \mu)^2 H_i \tilde{H}_i - (\omega \varepsilon)^2 E_r \tilde{E}_r + \\
& + \mu^2 \nabla \cdot H_r \nabla \cdot \tilde{H}_r + \varepsilon^2 \nabla \cdot E_r \nabla \cdot \tilde{E}_r + \\
& - \mu^2 \nabla \cdot H_i \nabla \cdot \tilde{H}_i - \varepsilon^2 \nabla \cdot E_i \nabla \cdot \tilde{E}_i \Big] d\Omega + \\
& + j \int_{\Omega} \left[ \nabla \times H_r \nabla \times \tilde{H}_i + \nabla \times H_i \nabla \times \tilde{H}_r + \nabla \times E_r \nabla \times \tilde{E}_i + \nabla \times E_i \nabla \times \tilde{E}_r + \right. \\
& \quad - \omega \varepsilon \nabla \times H_r \tilde{E}_r + \omega \varepsilon \nabla \times H_i \tilde{E}_i + \omega \varepsilon \nabla \times H_i \tilde{E}_r + \\
& \quad + \omega \mu \nabla \times E_r \tilde{H}_r - \omega \mu \nabla \times E_i \tilde{H}_i + \\
& \quad - (\omega \varepsilon)^2 E_i \tilde{E}_r - (\omega \varepsilon)^2 E_r \tilde{E}_i - (\omega \mu)^2 H_r \tilde{H}_i - (\omega \mu)^2 H_i \tilde{H}_r \\
& \quad - \omega \mu H_i \nabla \times \tilde{E}_i + \omega \mu H_r \nabla \times \tilde{E}_r + \omega \varepsilon E_i \nabla \times \tilde{H}_i - \omega \varepsilon E_r \nabla \times \tilde{H}_r \\
& \quad + \mu^2 \nabla \cdot H_r \nabla \cdot \tilde{H}_i + \varepsilon^2 \nabla \cdot E_r \nabla \cdot \tilde{E}_i + \\
& \quad \left. + \varepsilon^2 \nabla \cdot E_i \nabla \cdot \tilde{E}_r + \mu^2 \nabla \cdot H_i \nabla \cdot \tilde{H}_r \right] d\Omega \tag{7.24}
\end{aligned}$$

$$L(v(\tilde{E}, \tilde{H})) = \int_{\Omega} \left[ J_e \nabla \times \tilde{H}_r + J_e \omega \varepsilon \tilde{E}_i - M_e \nabla \times \tilde{E}_r + M_e \omega \mu \tilde{H}_i + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \rho_m \mu \nabla \cdot \tilde{H}_r + \rho_e \varepsilon \nabla \cdot \tilde{E}_r \Big] d\Omega + \\
& + j \int_{\Omega} \left[ J_e \nabla \times \tilde{H}_i - J_e \omega \varepsilon \tilde{E}_r - M_e \nabla \times \tilde{E}_i - M_e \omega \mu \tilde{H}_r + \right. \\
& \left. + \rho_m \mu \nabla \cdot \tilde{H}_i + \rho_e \varepsilon \nabla \cdot \tilde{E}_i \right] d\Omega \quad (7.25)
\end{aligned}$$

I dettagli dei calcoli seguono quelli illustrati nell'appendice A con ovvie modifiche dovute alla presenza di due campi accoppiati.

## 7.2 Validazione dei risultati

### 7.2.1 Soluzione Analitica Maxwell TE

Esprimiamo una soluzione analitica per il problema di Maxwell nel dominio della frequenza in assenza di sorgenti

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times H = j\omega \varepsilon E + J & \text{Legge di Faraday - Neumann} \\ \nabla \times E = -j\omega \mu H - M & \text{Legge di Maxwell - Ampere} \\ \nabla \cdot E = \rho_e & \text{Legge di Gauss (CE)} \\ \nabla \cdot H = \rho_m & \text{Legge di Gauss (CM)} \end{array} \right. \quad (7.26)$$

consideriamo un campo TE così formato

$$\begin{aligned}
\text{Campo Magnetico } \overline{H} &= (R H_x(x, y) + j I H_x(x, y)) \bar{i}_x + (R H_z(x, y) + j I H_z(x, y)) \bar{i}_z \\
\text{Campo Elettrico } \overline{E} &= (R E_y(x, z) + j I E_y(x, z)) \bar{i}_y
\end{aligned} \quad (7.27)$$

consideriamo l'espressione dei rotori e delle divergenze

$$\begin{aligned}
\nabla \times (H^r + j H^i) &= \nabla \times H^r + j \nabla \times H^i = \left( \frac{\partial H_x^r}{\partial z} - \frac{\partial H_z^r}{\partial x} \right) \bar{i}_y + \\
& + j \left( \frac{\partial H_x^i}{\partial z} - \frac{\partial H_z^i}{\partial x} \right) \bar{i}_y \quad (7.28)
\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (H^r + jH^i) = \nabla \cdot H^r + j\nabla \cdot H^i = \frac{\partial H_x^r}{\partial x} + \frac{\partial H_z^r}{\partial z} + j \left[ \frac{\partial H_x^i}{\partial x} + \frac{\partial H_z^i}{\partial z} \right] \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (E^r + jE^i) &= \nabla \times E^r + j\nabla \times E^i = \left( -\frac{\partial E_y^r}{\partial z} \right) \bar{i}_x + \left( \frac{\partial E_y^r}{\partial x} \right) \bar{i}_z + \\ &+ j \left[ \left( -\frac{\partial E_y^i}{\partial z} \right) \bar{i}_x + \left( \frac{\partial E_y^i}{\partial x} \right) \bar{i}_z \right] \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\nabla \cdot (E^r + jE^i) = \nabla \cdot E^r + j\nabla \cdot E^i = \frac{\partial E_y^r}{\partial y} + j \left[ \frac{\partial E_y^i}{\partial y} \right] \quad (7.31)$$

Consideriamo la seguente soluzione analitica:

$$\bar{E} = (1 + j) \text{Sin}(x)\text{Sin}(z) \bar{i}_y \quad (7.32)$$

$$\bar{H} = (1 + j) \text{Sin}(x)\text{Sin}(z) \bar{i}_x + (1 + j) \text{Sin}(x)\text{Sin}(z) \bar{i}_z \quad (7.33)$$

Ricaviamo i parametri  $J$ ,  $M$ ,  $\rho_e$ ,  $\rho_m$  a partire da questi valori di campo. Partiamo da:

$$\begin{aligned} J &= \nabla \times H - j\omega \varepsilon E = \\ &= \left( \frac{\partial \text{Sin}(x)\text{Sin}(z)}{\partial z} - \frac{\partial \text{Sin}(x)\text{Sin}(z)}{\partial x} \right) \bar{i}_y + \\ &+ j \left( \frac{\partial \text{Sin}(x)\text{Sin}(z)}{\partial z} - \frac{\partial \text{Sin}(x)\text{Sin}(z)}{\partial x} \right) \bar{i}_y - j\omega \varepsilon ((1 + j) \text{Sin}(x)\text{Sin}(z) \bar{i}_y) = \\ &= (\text{Sin}(x)\text{Cos}(z) - \text{Cos}(x)\text{Sin}(z)) \bar{i}_y + j(\text{Sin}(x)\text{Cos}(z) - \text{Cos}(x)\text{Sin}(z)) \bar{i}_y - \\ &- j\omega \varepsilon ((1 + j) \text{Sin}(x)\text{Sin}(z) \bar{i}_y) = \end{aligned}$$

$$= (1 + j) ((\sin(x)\cos(z) - \cos(x)\sin(z)) - j\omega \varepsilon \sin(x)\sin(z)) \bar{i}_y \quad (7.34)$$

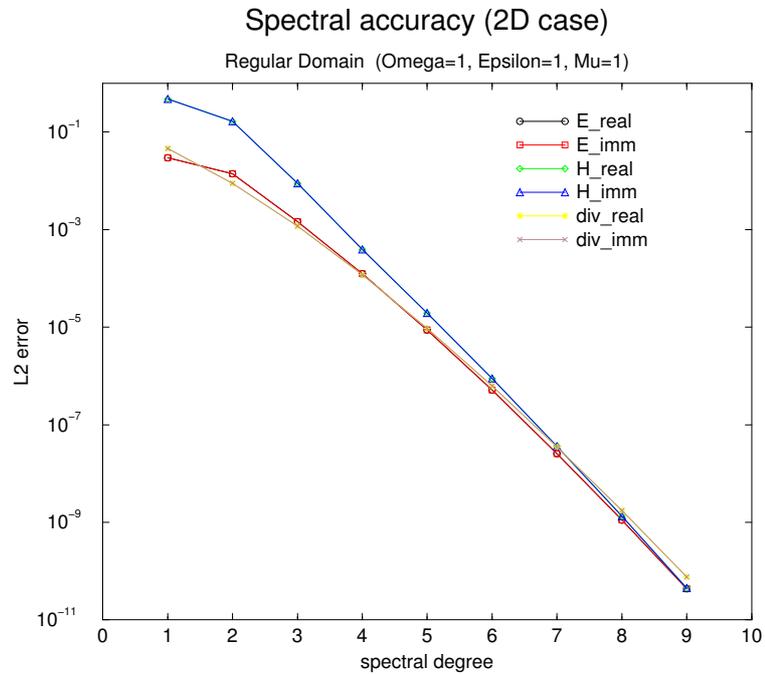
$$\begin{aligned} M &= -\nabla \times E - j\omega \mu H = \\ &= (1 + j) \left( \left( -\frac{\partial \sin(x)\sin(z)}{\partial z} \right) \bar{i}_x + \left( \frac{\partial \sin(x)\sin(z)}{\partial x} \right) \bar{i}_z \right) - \\ &\quad - j\omega \mu ((1 + j) \sin(x)\sin(z) \bar{i}_x + (1 + j) \sin(x)\sin(z) \bar{i}_z) = \\ &= (1 + j) ((-\sin(x)\cos(z) - j\omega \mu \sin(x)\sin(z)) \bar{i}_x + \\ &\quad + (\cos(x)\sin(z) - j\omega \mu \sin(x)\sin(z)) \bar{i}_z) \end{aligned} \quad (7.35)$$

$$\rho_e = \nabla \cdot E = 0 \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} \rho_m &= \nabla \cdot H = \\ &= 2j \left( \frac{\partial \sin(x)\sin(z)}{\partial x} + \frac{\partial \sin(x)\sin(z)}{\partial z} \right) = \\ &= 2j (\cos(x)\sin(z) + \sin(x)\cos(z)) \end{aligned} \quad (7.37)$$

Per validare la soluzione procediamo in questo modo: calcoliamo la soluzione analitica sul dominio scelto, successivamente usiamo i parametri  $J$ ,  $M$ ,  $\rho_e$ ,  $\rho_m$ , trovati ora, come termine noto da fornire al nostro solutore. Calcoliamo la differenza tra le due soluzioni per ogni punto del nostro dominio discretizzato e facciamo la media quadratica in norma  $L^2$ . Questo rappresenterà il tasso di errore per il grado spettrale scelto.

Figura 7.1: Grafico della convergenza Spettrale (Equazioni di Maxwell)



## 7.2.2 Grafici

Abbiamo eseguito le nostre prove usando come soluzione di confronto quella vista nel paragrafo precedente, utilizzando condizioni di Dirichlet dappertutto, inoltre per semplicità si è scelto di usare  $\Omega = 1$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ .

Come si può notare dal grafico 7.1 si ha un ottimo andamento di tutti i campi, con errori che nel caso di grado spettrale 9 tendono ad arrivare a  $10^{-11}$ .



# Capitolo 8

## Applicazioni

---

*Illustriamo di seguito un esempio di applicazione pratica del nostro solutore. Si tratta di una simulazione fatta su una giunzione a T in guida d'onda. Mostreremo inoltre come abbiamo realizzato la funzione che calcola i parametri S.*

### 8.1 Calcolo dei parametri S

Uno dei passi fondamentali per l'analisi di dispositivi a microonde è il calcolo dei parametri S. Nel caso dei metodi di griglia noi abbiamo la conoscenza del valore del campo nei punti (nodi) in cui abbiamo discretizzato il nostro dominio. Questo campo comprende nel caso di una guida d'onda tutti i modi. In questo paragrafo illustreremo la ricerca dell'ampiezza del modo fondamentale per una guida d'onda rettangolare a partire dalla conoscenza del campo completo sulle porte. Tutti gli integrali saranno fatti con le formule di Gauss-Lobatto per non perdere precisione nei dati. Partiamo dall'ipotesi di lavorare in guida d'onda rettangolare con un alimentazione sul modo  $TE_{10}$ .

Vediamo ora alcune formule fondamentali per i campi TE in guida d'onda rettangolare.

Vediamo le formule dei campi in guida per il modo  $TE_{10}$ :

$$H_x = \frac{1}{z} E_y \quad (8.1)$$

$$E_y = V(z) \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x}{a} \underline{i}_y \quad (8.2)$$

$$H_x = I(z) \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x}{a} \underline{i}_x \quad (8.3)$$

$$H_z = -\frac{1}{j\omega\mu} V(z) \sqrt{\frac{2}{ab}} \nabla_t^2 \left( \sin \frac{\pi x}{a} \right) \underline{i}_y \quad (8.4)$$

Vediamo le formule dei vari parametri fondamentali:

$$z_0 = \frac{\omega\mu}{\beta_z} \quad (8.5)$$

$$\beta_z = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad (8.6)$$

Illustriamo la formula che ci permette di passare dalla matrice Y alla matrice S:

$$S = [Y^{-1} + I]^{-1} [Y^{-1} - I] \quad (8.7)$$

Vediamo il modo in cui otteniamo la matrice Z, Y e S:

$$[V] = [Z][I] \quad z_{i,j} = \frac{V_i}{I_j} \Big|_{I_k=0, k \neq j} \quad (8.8)$$

$$[I] = [Y][V] \quad y_{i,j} = \frac{I_i}{V_j} \Big|_{V_k=0, k \neq j} \quad (8.9)$$

$$[V^-] = [S][V^+] \quad z_{i,j} = \frac{V_i^-}{V_j^+} \Big|_{V_k^+=0, k \neq j} \quad (8.10)$$

Introduciamo le formule dei campi in guida con l'espansione modale completa con i relativi parametri:

$$E_y = E_t = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{n\pi x}{a} e^{j\beta_n^a z} \quad (8.11)$$

$$H_x = H_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z_n^a} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{n \pi x}{a} e^{j \beta_n^a z} \quad (8.12)$$

$$\beta_n^a = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{n \pi}{a}\right)^2} \quad (8.13)$$

$$z_n^a = \frac{k_0 \eta_0}{\beta_n^a} \quad (8.14)$$

$$k_0 = 2 \pi \lambda \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (8.15)$$

$$z_n = \frac{2 \pi \lambda}{\sqrt{(2 \pi \lambda)^2 - \left(\frac{n \pi}{a}\right)^2}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (8.16)$$

$$z_1 = \frac{2 \pi \lambda}{\sqrt{(2 \pi \lambda)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (8.17)$$

## 8.2 Ricerca del modo fondamentale

Noi abbiamo tutto il campo  $H_t$  su tutte le porte. Cominciamo a calcolare la matrice  $[Y]$ , per la quale imponiamo, in sequenza:

$$\begin{aligned} V_2, V_3 &= 0 \\ V_2, V_3 &= 0 \\ V_1, V_3 &= 0 \end{aligned} \quad (8.18)$$

e ricaviamo le correnti  $I_j$  sulle varie porte. Per fare questo imponiamo campi elettrici tangenti nulli sulle porte corrispondenti a tensioni nulle e ricaviamo il campo magnetico trasverso sulla porta  $H_t$ . Poi sviluppiamo il campo sulle porte in modi, limitandoci al solo TE<sub>10</sub>. Partiamo da 8.3 per poter scrivere:

$$I(z) = H_x^{10} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x}{a}} \quad (8.19)$$

$H_x^{10}$  lo ricaviamo da 8.12 e lo scriviamo (ponendo  $z = 0$ ) come:

$$H_x^{10} = H_t = \frac{A_1}{z_1^a} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x}{a} e^{j\beta_1^a z} \quad (8.20)$$

a questo punto ci serve  $A_1$ , per ricavarlo sfruttiamo l'ortogonalità dei modi:

$$H_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z_n^a} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{n\pi x}{a} e^{j\beta_n^a z} \quad (8.21)$$

proiettiamo tutto sul modo fondamentale:

$$\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x}{a} \quad (8.22)$$

otteniamo:

$$\int_0^a H_t \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x}{a} dx = \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z_n^a} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{n\pi x}{a} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x}{a} dx \quad (8.23)$$

risolviamo il secondo integrale sfruttando l'ortogonalità

$$\int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z_n^a} \frac{2}{ab} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} dx \quad (8.24)$$

data l'ortogonalità dei modi l'unico termine diverso da 0 è quello con  $n = 1$  otteniamo dunque

$$\frac{2}{ab} \int_0^a \frac{A_1}{z_1^a} \left( \sin \frac{\pi x}{a} \right)^2 dx = \frac{2}{ab} \frac{A_1}{z_1^a} \frac{a}{2} = \frac{A_1}{b z_1^a} \quad (8.25)$$

da cui si ha

$$A_1 = b z_1^a \int_0^a H_t \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x}{a} dx \quad (8.26)$$

Troviamo  $A_1$  con integrazione numerica, come  $H_t$  usiamo quella delle trovato nelle varie aperture. Ricaviamo

$$H_x^{10} = \frac{A_1}{z_1^a} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\Pi x}{a} i_x \quad (8.27)$$

ricaviamo

$$I(0) = \frac{A_1}{z_1^a} \quad (8.28)$$

dal momento che  $V(0) = 1$  quindi ricaviamo i parametri  $Y$  che ci servono

$$y_{i,j} = \frac{I_i}{V_j} \Big|_{V_k=0, k \neq j} \quad (8.29)$$

Dobbiamo poi risolvere numericamente gli integrali. Abbiamo deciso di usare le formule di Gauss Lobatto per non avere perdita di precisione. Infatti tutto il metodo fin qui usato è ad alta precisione anche grazie all'utilizzo di tale metodo di integrazione, di conseguenza l'utilizzo di un metodo numerico diverso avrebbe richiesto un ricalcolo per interpolazione dei valori del campo sui nuovi punti di integrazione.

Eseguiamo come prima cosa il cambio di spazio

$$x = \alpha \hat{x} + \beta \quad (8.30)$$

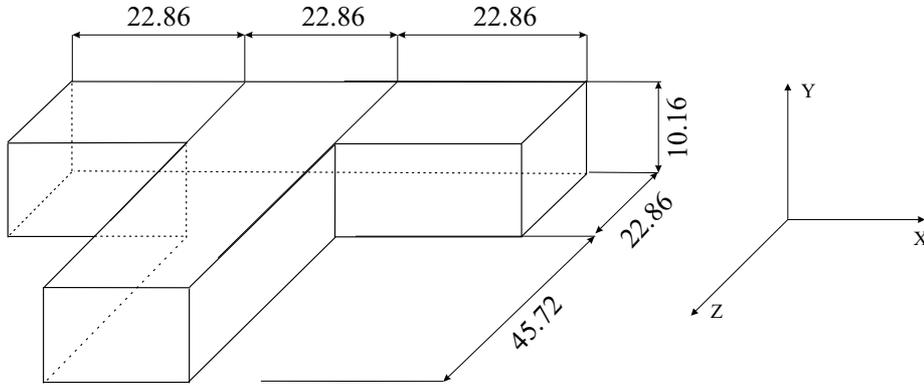
troviamo dunque  $\alpha$  e  $\beta$

$$\begin{cases} x_1 = -\alpha + \beta \\ x_2 = \alpha + \beta \end{cases} = \begin{cases} x_1 = -x_2 + 2\beta \\ \alpha = x_2 - \beta \end{cases} = \begin{cases} 2\beta = x_1 + x_2 \\ \alpha = x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2} \end{cases} = \begin{cases} \beta = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \alpha = \frac{x_2 - x_1}{2} \end{cases} \quad (8.31)$$

Vediamo la formula LGL, lo jacobiano della trasformazione è pari a  $J(\hat{x}) = \alpha$

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) dx &= \sum_{i=1}^{N_{edg}} \int_{\partial\Omega_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^{N_{edg}} \int_{-1}^1 J(\hat{x}) f(\hat{x}) d\hat{x} = \\ &= \sum_{i=1}^{N_{edg}} \sum_{j=0}^{\hat{N}} J(\hat{x}_j) f(\hat{x}_j) \omega(\hat{x}_j) \end{aligned} \quad (8.32)$$

Figura 8.1: Giunzione a T



Nel nostro caso:

$$f(\hat{x}_j) = A_1 = z_1^a b H_t(\hat{x}_j) \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\Pi \hat{x}_j}{a} \quad (8.33)$$

in questa funzione abbiamo due incognite:

$$\hat{x}_j = \alpha ct(i) + \beta \quad (8.34)$$

che è un punto fisico, dove con  $ct(i)$  indichiamo i nodi spettrali calcolati sul quadrato di riferimento, che sono stati calcolati da un apposita routine nel programma e  $H_t(\hat{x}_j)$  che ricaviamo dal vettore dei termini noti. A questo punto siamo in grado di ricavarci la matrice  $[Y]$  e a partire da questa tramite la 8.7 riusciamo a ricavarci la matrice  $[S]$ .

### 8.3 Giunzione a T

In figura 8.1 possiamo vedere una giunzione a T, in guida d'onda. Si è simulata una guida in aria funzionante a 10 GHz. La prova è stata effettuata considerando le due porte laterali della guida metallizzate, e la porta frontale come porta di alimentazione. In questa configurazione la guida deve riflettere totalmente il campo incidente, ci aspettiamo dunque un parametro  $S_{11}$  pari a 1.

Nella figura 8.2 vediamo i risultato prodotti dal nostro solutore. Come alimentazione è stato utilizzato un modo  $TE_{10}$ , dagli snapshot si può vedere l'andamento dei campi in guida che rispettano le attese teoriche.

In figura 8.3 e 8.4, in cui la fase è calcolata in radianti, vediamo l'andamento di modulo e fase a varie frequenze della differenza tra il valore ottenuto con il nostro solutore e il valore teorico aspettato, 1. Come possiamo vedere le differenze sono molto basse e arrivano a  $10^{-5}$  al valore di risonanza di 10 GHz.

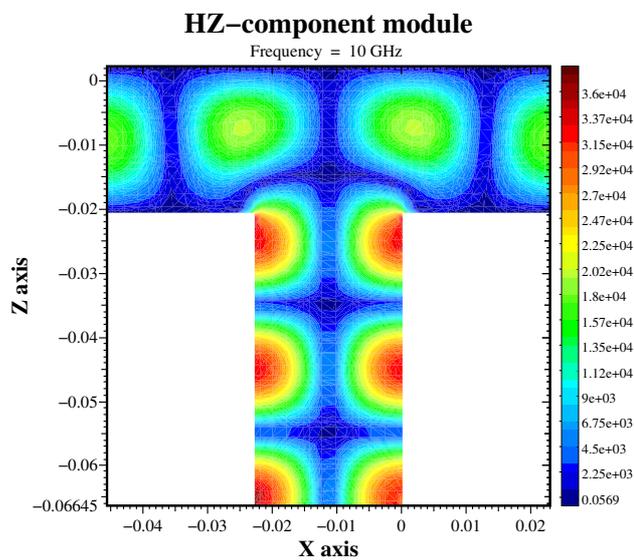
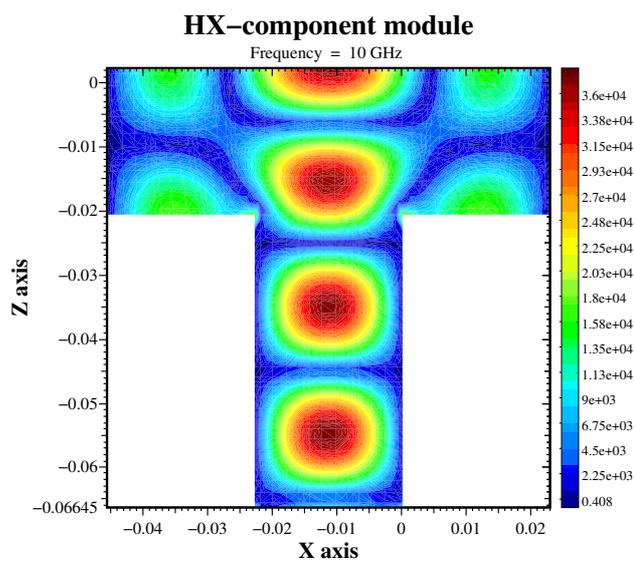
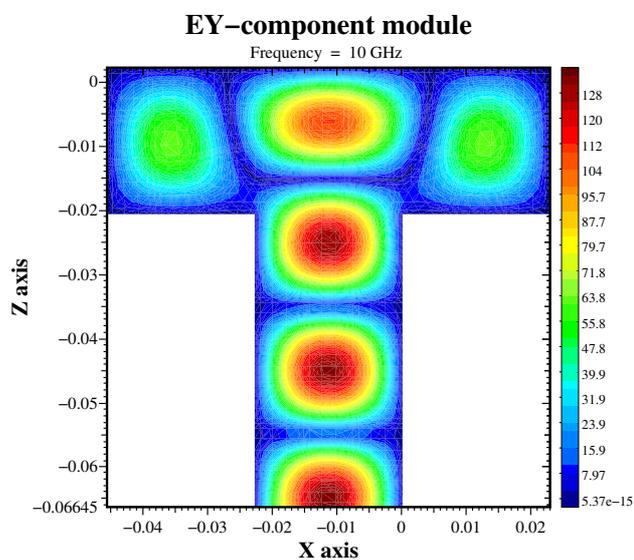


Figura 8.3: Modulo del parametro S11

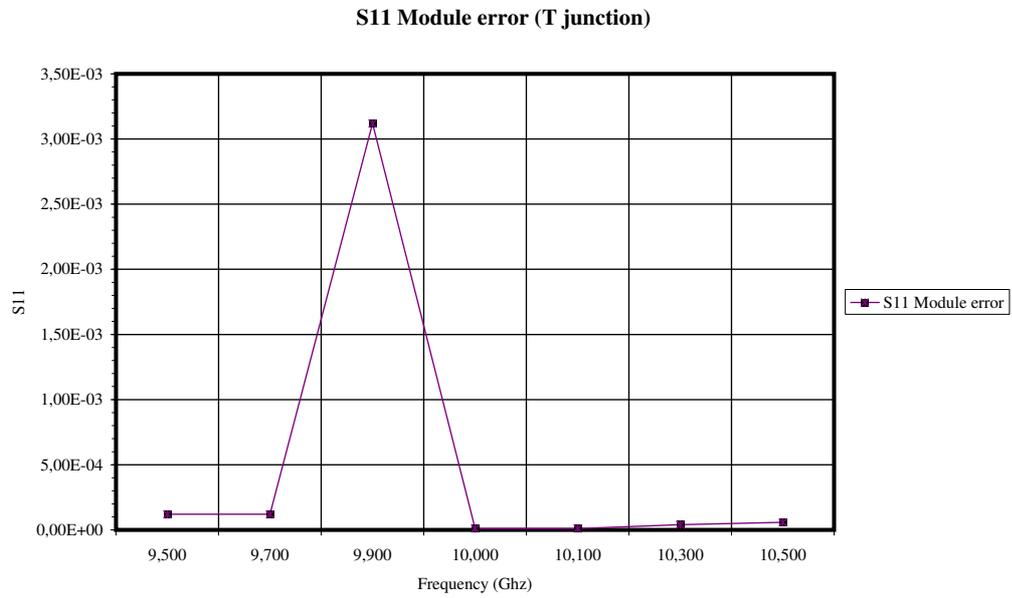
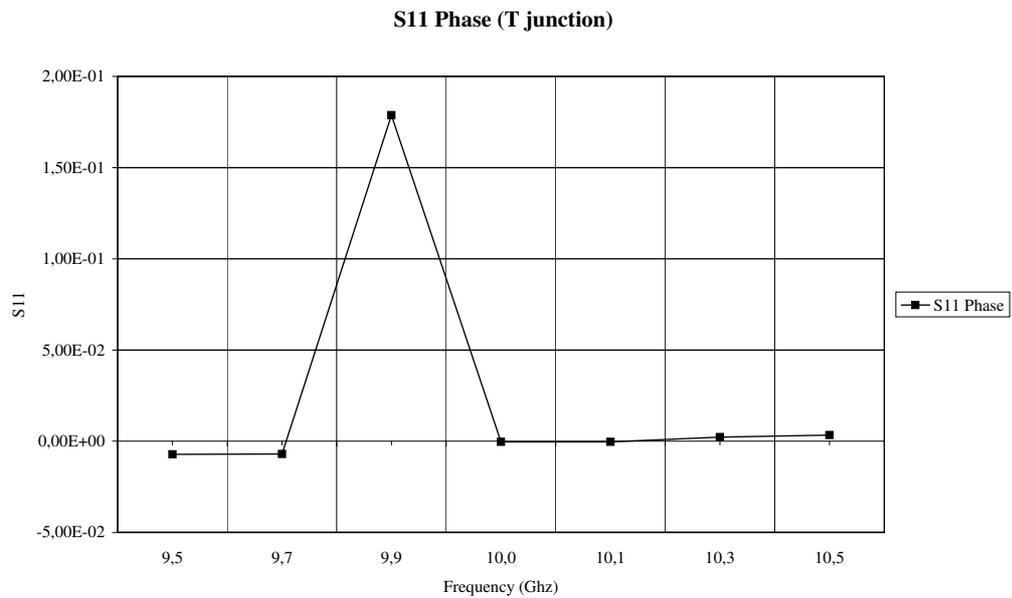


Figura 8.4: Fase del parametro S11





# Capitolo 9

## Conclusioni

---

*In questo capitolo descriveremo i risultati a cui siamo giunti in questa tesi. Illustreremo lo stato della ricerca fino a qui sviluppato e i possibili sviluppi futuri.*

### 9.1 Risultati raggiunti

Scopo del nostro lavoro è stato quello di realizzare un solutore per le equazioni di Maxwell nel dominio della frequenza basato su un metodo di griglia ad elevata accuratezza esente da modi spuri.

Il lavoro è partito con uno studio di fattibilità del problema in cui sono stati decisi i diversi punti da affrontare. In questa fase, basandoci sul numeroso materiale pubblicato sull'argomento, abbiamo fatto alcune scelte fondamentali per il proseguimento del lavoro.

La decisione di lavorare nel dominio della frequenza è stata suggerita dal fatto che, in questo dominio, le equazioni di Maxwell presentano solo derivate parziali spaziali, mentre nel dominio del tempo ne abbiamo anche una temporale. Questo semplifica notevolmente la formulazione del problema. Inoltre, qualora fossero necessari, è possibile ottenere risultati nel dominio del tempo a partire da quelli nel dominio della frequenza eseguendo un semplice IFFT (*inverse fast fourier transformation*).

Abbiamo deciso di usare gli elementi spettrali, sottoclasse degli elementi finiti. Questa scelta è stata suggerita dalla grande esperienza accumulata sugli elementi spettrali applicati al campo della meccanica computazionale dal gruppo SSM

del CRS4 con cui abbiamo collaborato per sviluppare questa tesi. Il metodo degli elementi spettrali, come quello degli elementi finiti, appartiene alla famiglia dei metodi di griglia per la risoluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali.

In questa classe di metodi per ottenere la soluzione di una equazione differenziale in un dato dominio è sufficiente fornire al solutore il dominio opportunamente discretizzato in elementi triangolari o quadrangolari (nel caso 2D), si fornisce cioè quella che tecnicamente viene chiamata la *mesh* del dominio. In questa *mesh* l'utente specifica inoltre le condizioni al contorno e le eventuali sorgenti presenti nel dominio. La generazione di queste *mesh* viene affidata a programmi specifici; noi per le nostre prove abbiamo usato il software IDEAS.

L'approccio che si segue nel metodo degli elementi spettrali, come si è visto, consente diversi vantaggi rispetto a quello degli elementi finiti. Usando gli elementi finiti si ha la grossa limitazione dell'ordine degli elementi che viene utilizzato; una volta scelto, questo non può essere cambiato a patto ovviamente di non cambiare solutore. Anche cambiando il solutore si ha per la necessità di modificare la *mesh*, adattandola all'ordine dei nuovi elementi richiesti; inoltre sviluppare solutori basati sugli elementi finiti con ordine superiore al quarto risulta molto difficile e generalmente non viene fatto.

Con gli elementi spettrali invece possiamo cambiare l'ordine del metodo senza modificare *mesh* e solutore, questo si può fare perchè il cambio di ordine coincide con la modifica del grado del polinomio interpolante utilizzato. Questo vantaggio si traduce in una grande flessibilità di utilizzo e consente di raggiungere precisioni molto elevate.

Questa è la grande differenza tra i metodi di tipo *h*, a cui appartiene il metodo degli elementi finiti, in cui per incrementare la precisione possiamo solo infittire la *mesh*, e quelli *h-p*, a cui appartiene il metodo degli elementi spettrali, in cui per incrementare la precisione possiamo sia infittire la *mesh* che aumentare l'ordine dei polinomi interpolanti.

Un grosso problema che si presenta con i metodi agli elementi finiti è il problema delle soluzioni spurie. Queste sono soluzioni non fisiche che il solutore fornisce in particolari configurazioni elettromagnetiche del dominio in esame. Lo studio delle soluzioni spurie è un argomento di grande interesse e diversi sono stati in passato i tentativi per trovare una soluzione a questo problema.

Noi abbiamo seguito l'approccio descritto in [8] in cui gli autori includono entrambe le condizioni della divergenza nella formulazione del problema. Questo in contrasto con quello che viene fatto generalmente in cui tali equazioni, essendo considerate numericamente ridondanti, non vengono incluse nella formulazione.

Tale ridondanza a parere degli autori, da noi condiviso, è la chiave per evitare le soluzioni spurie. L'inclusione di tali equazioni rende il sistema delle equazioni di Maxwell sovradeterminato e quindi non risolvibile con tecniche classiche. Da qui l'esigenza di introdurre un metodo che permetta di risolvere questo tipo di sistemi, il *least square method*.

Il nostro solutore, utilizzando un approccio *least square*, modella con il metodo degli elementi spettrali le equazioni di Maxwell del primo ordine nel dominio della frequenza, includendo le equazioni della divergenza. Questo rende il solutore esente da modi spuri e ad elevata accuratezza, soddisfacendo i prerequisiti che ci eravamo posti. Le simulazioni illustrate nel capitolo 8 mostrano l'elevata precisione a cui si può giungere con questo metodo in un esempio applicativo.

## 9.2 Sviluppi futuri

Il lavoro svolto in questa tesi pone le basi per sviluppi futuri.

A partire dai calcoli qui sviluppati è possibile realizzare un solutore 3D che renderebbe ancora più ampia la classe di applicazioni a cui il nostro metodo può essere applicato. Tale sviluppo non richiede nuove formulazioni teoriche, ma la semplice estensione al caso tridimensionale dei calcoli fin qui sviluppati.

Un ulteriore ed interessante sviluppo di questo lavoro sarebbe l'inclusione di nuove condizioni al contorno: quella di impedenza, quella di periodicità quelle di Meixner. Queste introduzioni permetterebbero di risolvere problemi che al momento vengono trattati con notevole difficoltà

Un approccio interessante è poi quello rappresentato dai metodi ibridi in cui più tecniche, ad esempio analitiche e di griglia, vengono accoppiate per trarne i vantaggi e minimizzarne i difetti. E' nostro parere che l'accoppiamento del LSSEM con il metodo dei momenti permetterebbe di trattare agevolmente i problemi di radiazione, problemi in cui da sempre i metodi di griglia hanno incontrato diverse difficoltà applicative (si veda [22] per approfondimenti).



# Appendice A

## LSSEM Caso Statico

---

Vediamo lo sviluppo dei calcoli per comprendere più a fondo la formulazione che abbiamo usato. Partiamo dalle espressioni di divergenza e rotore

$$\nabla \times A = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) u_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) u_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) u_z \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.2})$$

Se consideriamo la base illustrata in 6.9 avremo i seguenti valori di divergenza e rotore per il generico vettore  $v$  :

per il caso 1

$$\nabla \times v = \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} u_y - \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} u_z; \quad \nabla \cdot v = \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \quad (\text{A.3})$$

per il caso 2

$$\nabla \times v = -\frac{\partial \Psi_i}{\partial z} u_x + \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} u_z; \quad \nabla \cdot v = \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \quad (\text{A.4})$$

per il caso 3

$$\nabla \times v = -n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} u_x - n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} u_y + \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) u_z$$

$$\nabla \cdot v = -n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \quad (\text{A.5})$$

per il caso 4

$$\begin{aligned} \nabla \times v &= -n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} u_x + n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} u_y + \left( n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} - n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) u_z \\ \nabla \cdot v &= n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Nel caso 2D si arriva alle seguenti forme  $\frac{\partial \Psi_i}{\partial z} = 0$ :

$$\nabla \times v = -\frac{\partial \Psi_i}{\partial y} u_z; \quad \nabla \cdot v = \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \times v = \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} u_z; \quad \nabla \cdot v = \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \times v = \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) u_z; \quad \nabla \cdot v = -n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \times v = \left( n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} - n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) u_z; \quad \nabla \cdot v = n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \quad (\text{A.10})$$

Partiamo dalla forma bilineare 6.8 riscriviamo l'integrale per il primo caso esplicitando i vari rotori e divergenze per i vari termini di base; avremo per il caso  $v = (\Psi_i, 0)$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(x)} \int_{\Omega} \left[ \left( -\frac{\partial \Psi_j}{\partial y} u_z \right) \cdot \left( -\frac{\partial \Psi_i}{\partial y} u_z \right) + \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \right) \right] d\Omega + \\ & + \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(y)} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} u_z \right) \cdot \left( -\frac{\partial \Psi_i}{\partial y} u_z \right) + \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \right) \right] d\Omega + \\ & + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_1}} u_j^{(\Gamma_1)} \int_{\Omega} \left[ \left( n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) u_z \cdot \left( -\frac{\partial \Psi_i}{\partial y} u_z \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( -n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \right) \Big] d\Omega + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_2}} u_j^{(\Gamma_2)} \int_{\Omega} \left[ \left( n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} - n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) u_z \cdot \left( -\frac{\partial \Psi_i}{\partial y} u_z \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left( n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \right) \right] d\Omega \tag{A.11}
\end{aligned}$$

per il caso  $v = (0, \Psi_i)$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(x)} \int_{\Omega} \left[ \left( -\frac{\partial \Psi_j}{\partial y} u_z \right) \cdot \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} u_z \right) + \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega + \\
& + \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(y)} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} u_z \right) \cdot \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} u_z \right) + \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_1}} u_j^{(\Gamma_1)} \int_{\Omega} \left[ \left( n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) u_z \cdot \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} u_z \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left( -n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_2}} u_j^{(\Gamma_2)} \int_{\Omega} \left[ \left( n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} - n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) u_z \cdot \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} u_z \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left( n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega \tag{A.12}
\end{aligned}$$

per il caso  $v = (-n2_i \Psi_i, n1_i \Psi_i)$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(x)} \int_{\Omega} \left[ \left( -\frac{\partial \Psi_j}{\partial y} u_z \right) \cdot \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) u_z + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \right) \left( -n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(y)} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} u_z \right) \cdot \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) u_z + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( -n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_1}} u_j^{(\Gamma_1)} \int_{\Omega} \left[ \left( \left( n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) u_z \cdot \left( \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) u_z \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left( -n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( -n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_2}} u_j^{(\Gamma_2)} \int_{\Omega} \left[ \left( \left( n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} - n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) u_z \right) \cdot \left( \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) u_z \right) \right. \\
& \quad \left. + \left( n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( -n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega \quad (\text{A.13})
\end{aligned}$$

per il caso  $v = (n1_i \Psi_i, n2_i \Psi_i)$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(x)} \int_{\Omega} \left[ \left( -\frac{\partial \Psi_j}{\partial y} u_z \right) \cdot \left( n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} - n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) u_z + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \right) \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega + \\
& + \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(y)} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} u_z \right) \cdot \left( n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} - n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) u_z + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_1}} u_j^{(\Gamma_1)} \int_{\Omega} \left[ \left( \left( n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) u_z \cdot \left( \left( n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} - n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) u_z \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( -n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \Big] d\Omega \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_2}} u_j^{(\Gamma_2)} \int_{\Omega} \left[ \left( \left( n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} - n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) u_z \right) \cdot \left( \left( n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} - n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) u_z \right) + \right. \\
& \left. + \left( n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

Passiamo adesso al termine noto 6.6 e ricordando le A.7, A.8, A.9, A.10, avremo per il caso  $v = (\Psi_i, 0)$ ,

$$\int_{\Omega} \left[ -\omega \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \rho \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \right] d\Omega \quad (\text{A.15})$$

per il caso  $v = (0, \Psi_i)$ ,

$$\int_{\Omega} \left[ \omega \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \rho \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right] d\Omega \quad (\text{A.16})$$

per il caso  $v = (-n2 \Psi_i, n1 \Psi_i)$ ,

$$\int_{\Omega} \left[ \omega \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) + \rho \left( -n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega \quad (\text{A.17})$$

per il caso  $v = (n1 \Psi_i, n2 \Psi_i)$ ,

$$\int_{\Omega} \left[ \omega \left( n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} - n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) + \rho \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega \quad (\text{A.18})$$

Semplificando i calcoli giungiamo al sistema da risolvere che è del tipo  $Au = F$ , la formulazione dettagliata è data da:

Caso  $v = (\Psi_i, 0)$ ,

$$\sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(x)} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \right] d\Omega +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(y)} \int_{\Omega} \left[ -\frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \right] d\Omega + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_1}} u_j^{(\Gamma_1)} \int_{\Omega} \left[ -\left( n_{1j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n_{2j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \left( -n_{2j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n_{1j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \right] d\Omega + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_2}} u_j^{(\Gamma_2)} \int_{\Omega} \left[ -\left( n_{2j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} - n_{1j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \left( n_{1j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n_{2j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \right] d\Omega = \\
& = \int_{\Omega} \left[ -\omega \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \rho \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \right] d\Omega \tag{A.19}
\end{aligned}$$

Caso  $v = (0, \Psi_i)$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(x)} \int_{\Omega} \left[ -\frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right] d\Omega + \\
& + \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(y)} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right] d\Omega + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_1}} u_j^{(\Gamma_1)} \int_{\Omega} \left[ \left( n_{1j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n_{2j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \left( -n_{2j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n_{1j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right] d\Omega + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_2}} u_j^{(\Gamma_2)} \int_{\Omega} \left[ \left( n_{2j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} - n_{1j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \left( n_{1j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n_{2j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right] d\Omega = \\
& = \int_{\Omega} \left[ \omega \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \rho \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \right] d\Omega \tag{A.20}
\end{aligned}$$

Caso  $v = (-n_{2i} \Psi_i, n_{1i} \Psi_i)$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(x)} \int_{\Omega} \left[ -\frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \left( -n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega + \\
& + \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(y)} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \left( -n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_1}} u_j^{(\Gamma_1)} \int_{\Omega} \left[ \left( n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left( -n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( -n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_2}} u_j^{(\Gamma_2)} \int_{\Omega} \left[ \left( n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} - n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left( n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( -n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \\
& = \int_{\Omega} \left[ \omega \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) + \rho \left( -n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega \quad (\text{A.21})
\end{aligned}$$

Caso  $v = (n1_i \Psi_i, n2_i \Psi_i)$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(x)} \int_{\Omega} \left[ -\frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \left( n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} - n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega + \\
& + \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(y)} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \left( n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} - n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_1}} u_j^{(\Gamma_1)} \int_{\Omega} \left[ \left( n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} - n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left( -n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_2}} u_j^{(\Gamma_2)} \int_{\Omega} \left[ \left( n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} - n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} - n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left( n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \\
& = \int_{\Omega} \left[ \omega \left( n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} - n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) + \rho \left( n1_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n2_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega \quad (A.22)
\end{aligned}$$

Come illustrato nel paragrafo 3.4.4 dobbiamo passare nello spazio di riferimento, per semplicità definiamo le seguenti quantità facilmente individuabili all'interno delle espressioni precedenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \equiv DCA \\ -\frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \equiv DCB \\ n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \equiv DCC_j \\ -n2_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + n1_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \equiv DCD_j \end{array} \right. \quad (A.23)$$

Esprimiamo ora l'integrale sulla regione da analizzare  $\Omega$  come somma di integrali sui singoli elementi quadrangolari, quindi per ogni integrale si potrà definire la sostituzione:

$$\int_{\Omega} () d\Omega = \sum_{k=1}^{Nel} \int_{T_k} () d\Omega \quad (A.24)$$

passando al parent domain bisogna ricordare che:

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\Omega = \int_{\hat{\Omega}} J(\hat{x}, \hat{y}) \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{\Omega} \quad (A.25)$$

e che:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J(\hat{x}, \hat{y})} \left( \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} = - \frac{1}{J(\hat{x}, \hat{y})} \left( \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right) \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

possiamo riscrivere la A.23 come:

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial y} \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial x} \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial x} \equiv \widehat{DCA} \\ -\frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial x} \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial y} \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial x} \equiv \widehat{DCB} \\ n1_j \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial x} + n2_j \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial y} \equiv \widehat{DCC}_j \\ -n2_j \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial x} + n1_j \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial y} \equiv \widehat{DCD}_j \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

Esplicitando le derivate si arriva a:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J(\hat{x}, \hat{y})^2} \left( \left( \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{y}} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial \hat{y}} \right) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{y}} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial \hat{y}} \right) \right) \equiv \widehat{DCA} \\ & - \frac{1}{J(\hat{x}, \hat{y})^2} \left( - \left( \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{y}} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial \hat{y}} \right) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{y}} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial \hat{y}} \right) \right) \equiv \widehat{DCB} \\ & \frac{1}{J(\hat{x}, \hat{y})} \left( n1_j \left( \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{y}} \right) - n2_j \left( \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{y}} \right) \right) \equiv \widehat{DCC}_j \\ & \frac{1}{J(\hat{x}, \hat{y})} \left( -n2_j \left( \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{y}} \right) - n1_j \left( \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{y}} \right) \right) \equiv \widehat{DCD}_j \end{aligned}$$

Dato che :

$$\begin{cases} x = \alpha_1 \hat{x} + \beta_1 \hat{y} + \gamma_1 \hat{x} \hat{y} + \delta_1 \\ y = \alpha_2 \hat{x} + \beta_2 \hat{y} + \gamma_2 \hat{x} \hat{y} + \delta_2 \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

$$J(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{vmatrix} (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}) & (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}) \\ (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}) & (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}) \end{vmatrix} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} = (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}) \\ \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} = (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}) \\ \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} = (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}) \\ \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} = (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}) \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

Sostituendo questi valori si ha:

$$\begin{aligned} \widehat{DCA} &= \frac{1}{J(\hat{x}, \hat{y})^2} \left( \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{x}} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{y}} \right) \right. \\ &\left. \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial \hat{x}} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial \hat{y}} \right) + \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{x}} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{y}} \right) \right. \\ &\left. \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial \hat{x}} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial \hat{y}} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} \widehat{DCB} &= -\frac{1}{J(\hat{x}, \hat{y})^2} \left( - \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{x}} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{y}} \right) \right. \\ &\left. \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial \hat{x}} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial \hat{y}} \right) + \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{x}} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{y}} \right) \right. \\ &\left. \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial \hat{x}} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_i}{\partial \hat{y}} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} \widehat{DCC}_j &= \frac{1}{J(\hat{x}, \hat{y})} \left( n1_j \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{x}} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{y}} \right) - \right. \\ &\left. -n2_j \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{x}} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{y}} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

$$\widehat{DCD}_j = \frac{1}{J(\hat{x}, \hat{y})} \left( -n2_j \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{x}} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{y}} \right) - \right.$$

$$-n1_j \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{x}} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_j}{\partial \hat{y}} \right) \quad (\text{A.34})$$

A questo punto occorre ricordare che per il particolare tipo di polinomi con cui abbiamo a che fare possiamo dividere la funzione  $\widehat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y})$  nel prodotto delle due funzioni  $\widehat{\Psi}_p(\hat{x}) \widehat{\Psi}_q(\hat{y})$  mentre  $\widehat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y})$  la possiamo dividiamo nel prodotto  $\widehat{\Psi}_r(\hat{x}) \widehat{\Psi}_s(\hat{y})$ . Questo comporta una semplificazione dei conti, infatti nelle derivate ci troviamo ad avere a che fare con prodotti di funzioni, questo semplifica di molto le cose dato che possiamo semplificare le derivate precedenti in questo modo:

$$\frac{\partial \widehat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} = \widehat{\Psi}_q(\hat{y}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_p(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{\partial \widehat{\Psi}_i(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} = \widehat{\Psi}_p(\hat{x}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_q(\hat{y})}{\partial \hat{y}} \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{\partial \widehat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} = \widehat{\Psi}_s(\hat{y}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_r(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{\partial \widehat{\Psi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} = \widehat{\Psi}_r(\hat{x}) \frac{\partial \widehat{\Psi}_s(\hat{y})}{\partial \hat{y}} \quad (\text{A.38})$$

A questo punto occorre svolgere gli integrali usando le formule di Gauss Lobatto viste nel capitolo 2, riassumiamole brevemente:

$$\int_{\widehat{\Omega}_k} f^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) d\widehat{\Omega}_k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} \quad (\text{A.39})$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f^{(k)}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} = \sum_{l,m=0}^{NLGL} f^{(k)}(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \hat{\omega}_{l,m} \quad (\text{A.40})$$

bisogna notare che anche per le funzioni peso  $\hat{\omega}_{l,m}$  vale il discorso fatto prima sui polinomi, possiamo dunque dividerle nel prodotto di due polinomi  $\hat{\omega}_l \hat{\omega}_m$

$$\sum_{l,m=0}^{NLGL} f^{(k)}(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \hat{\omega}_{l,m} = \sum_{l,m=0}^{NLGL} f^{(k)}(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \quad (\text{A.41})$$

vediamo cosa si ottiene:

$$\begin{aligned}
& \widehat{DCA}_{p,q,r,s,l,m} = \\
& = \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)^2} \left( \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m) \frac{\partial \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) \right. \\
& \quad \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m) \frac{\partial \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) + \\
& \quad \left. + \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m) \frac{\partial \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) \right. \\
& \quad \left. \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m) \frac{\partial \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) \right) \quad (\text{A.42})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \widehat{DCB}_{p,q,r,s,l,m} = \\
& = -\frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)^2} \left( - \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m) \frac{\partial \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) \right. \\
& \quad \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m) \frac{\partial \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) + \\
& \quad \left. + \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m) \frac{\partial \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) \right. \\
& \quad \left. \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m) \frac{\partial \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) \right) \quad (\text{A.43})
\end{aligned}$$

$$\widehat{DCC}_{r,s,l,m} = \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)}$$

$$\begin{aligned} & \left( n1_j \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m) \frac{\partial \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) - \right. \\ & \left. -n2_j \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m) \frac{\partial \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

$$\widehat{DCD}_{r,s,l,m} = \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)}$$

$$\begin{aligned} & \left( -n2_j \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m) \frac{\partial \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) - \right. \\ & \left. -n1_j \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m) \frac{\partial \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l) \frac{\partial \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m)}{\partial \hat{y}} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Arrivati a questo punto occorre risolvere le derivate usando la matrice di derivazione spettrale (vedi 2.48 e 2.46), ricordiamo che

$$\frac{\partial \hat{f}(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} \simeq \sum_{k=0}^{NLGL} D_{l,k} \hat{f}(\hat{x}_l) \quad (\text{A.46})$$

dato che nel nostro caso  $\hat{f} = \hat{\Psi}_i$  si ha che

$$\hat{\Psi}_i(\hat{x}_l) = \delta_{i,l} \quad (\text{A.47})$$

e di conseguenza:

$$\frac{\partial \hat{\Psi}_i(\hat{x}_l)}{\partial \hat{x}} = D_{l,i} \quad (\text{A.48})$$

semplifichiamo le espressioni precedenti

Caso  $v = (\Psi_i, 0)$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(x)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \widehat{DCA}_{p,q,r,s,l,m} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(y)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \widehat{DCB}_{p,q,r,s,l,m} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_1}} u_j^{(\Gamma_1)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m) D_{l,p} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l) D_{m,q} \right) + \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m) D_{l,p} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l) D_{m,q} \right) \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_2}} u_j^{(\Gamma_2)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ -\widehat{DCD}_{r,s,l,m} \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m) D_{l,p} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l) D_{m,q} \right) + \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m) D_{l,p} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l) D_{m,q} \right) \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) = \\
& = \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ \omega \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m) D_{l,p} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l) D_{m,q} \right) + \rho \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m) D_{l,p} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l) D_{m,q} \right) \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) \quad (\text{A.49})
\end{aligned}$$

Caso  $v = (0, \Psi_i)$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(x)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( -\widehat{DCB}_{p,q,r,s,l,m} J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(y)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \widehat{DCA}_{p,q,r,s,l,m} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_1}} u_j^{(\Gamma_1)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m) D_{l,p} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l) D_{m,q} \right) - \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m) D_{l,p} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l) D_{m,q} \right) \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_2}} u_j^{(\Gamma_2)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ -\widehat{DCD}_{r,s,l,m} \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m) D_{l,p} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l) D_{m,q} \right) - \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m) D_{l,p} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l) D_{m,q} \right) \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) = \\
& = \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ \omega \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m) D_{l,p} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l) D_{m,q} \right) - \rho \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_q(\hat{y}_m) D_{l,p} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_p(\hat{x}_l) D_{m,q} \right) \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) \quad (\text{A.50})
\end{aligned}$$

Caso  $v = (-n2_i \Psi_i, n1_i \Psi_i)$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(x)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m) D_{l,r} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l) D_{m,s} \right) \widehat{DCC}_{p,q,l,m} + \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m) D_{l,r} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l) D_{m,s} \right) \widehat{DCD}_{p,q,l,m} \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& \quad + \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(y)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m) D_{l,r} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l) D_{m,s} \right) \widehat{DCC}_{p,q,l,m} - \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m) D_{l,r} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l) D_{m,s} \right) \widehat{DCD}_{p,q,l,m} \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& \quad + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_1}} u_j^{(\Gamma_1)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \widehat{DCC}_{p,q,l,m} + \widehat{DCD}_{r,s,l,m} \widehat{DCD}_{p,q,l,m} \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& \quad + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_2}} u_j^{(\Gamma_2)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ -\widehat{DCD}_{r,s,l,m} \widehat{DCC}_{p,q,l,m} + \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \widehat{DCD}_{p,q,l,m} \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) \\
& \quad = \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ \omega \widehat{DCC}_{p,q,l,m} + \rho \widehat{DCD}_{p,q,l,m} \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) \quad (A.51)
\end{aligned}$$

Caso  $v = (n1_i \Psi_i, n2_i \Psi_i)$ ,

$$\sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(x)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ -\frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m) D_{l,r} - \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l) D_{m,s} \widehat{DCD}_{p,q,l,m} + \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \\
& \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m) D_{l,r} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l) D_{m,s} \right) \widehat{DCC}_{p,q,l,m} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \Big) + \\
& + \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(y)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ -\frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \left( (\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m) D_{l,r} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l) D_{m,s} \right) \widehat{DCD}_{p,q,l,m} - \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \right. \right. \\
& \left. \left. \left( (\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m) D_{l,r} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \hat{\Psi}_r(\hat{x}_l) D_{m,s} \right) \widehat{DCC}_{p,q,l,m} \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_1}} u_j^{(\Gamma_1)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ -\widehat{DCC}_{r,s,l,m} \widehat{DCD}_{p,q,l,m} + \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \widehat{DCC}_{p,q,l,m} \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_2}} u_j^{(\Gamma_2)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ \widehat{DCD}_{r,s,l,m} \widehat{DCD}_{p,q,l,m} + \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \widehat{DCC}_{p,q,l,m} \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) \\
& = \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ -\omega \widehat{DCD}_{p,q,l,m} + \rho \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) \quad (\text{A.52})
\end{aligned}$$

Occorre poi ricordare la particolare forma dei polinomi che stiamo usando:  $\hat{\Psi}_p(\hat{x}_l) = \delta_{p,l}$ ,  $\hat{\Psi}_q(\hat{y}_m) = \delta_{q,m}$ ,  $\hat{\Psi}_r(\hat{x}_l) = \delta_{r,l}$ ,  $\hat{\Psi}_s(\hat{y}_m) = \delta_{s,m}$  vediamo cosa si ottiene:

Caso  $v = (\Psi_i, 0)$

$$\sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(x)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \widehat{DCA}_{p,q,r,s,l,m} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(y)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \widehat{DCB}_{p,q,r,s,l,m} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_1}} u_j^{(\Gamma_1)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{q,m} D_{l,p} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{p,l} D_{m,q}) + \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{q,m} D_{l,p} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{p,l} D_{m,q}) \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_2}} u_j^{(\Gamma_2)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ -\widehat{DCD}_{r,s,l,m} \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{q,m} D_{l,p} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{p,l} D_{m,q}) + \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. ((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{q,m} D_{l,p} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{p,l} D_{m,q}) \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) = \\
& = \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ \omega \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{q,m} D_{l,p} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{p,l} D_{m,q}) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \rho \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} ((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{q,m} D_{l,p} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{p,l} D_{m,q}) \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) \quad (\text{A.53})
\end{aligned}$$

Caso  $v = (0, \Psi_i)$ ,

$$\sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(x)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( -\widehat{DCB}_{p,q,r,s,l,m} J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(y)} \sum_{l,m=0}^{N_{LGL}} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \widehat{DC} A_{p,q,r,s,l,m} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_1}} u_j^{(\Gamma_1)} \sum_{l,m=0}^{N_{LGL}} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} ((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{q,m} D_{l,p} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{p,l} D_{m,q}) - \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{q,m} D_{l,p} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{p,l} D_{m,q}) \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_2}} u_j^{(\Gamma_2)} \sum_{l,m=0}^{N_{LGL}} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ -\widehat{DCC}_{r,s,l,m} \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} ((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{q,m} D_{l,p} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{p,l} D_{m,q}) - \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{q,m} D_{l,p} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{p,l} D_{m,q}) \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) = \\
& = \sum_{l,m=0}^{N_{LGL}} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ \omega \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} ((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{q,m} D_{l,p} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{p,l} D_{m,q}) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \rho \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{q,m} D_{l,p} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{p,l} D_{m,q}) \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right)
\end{aligned}$$

Caso  $v = (-n2_i \Psi_i, n1_i \Psi_i)$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(x)} \sum_{l,m=0}^{N_{LGL}} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{s,m} D_{l,r} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{r,l} D_{m,s}) \widehat{DCC}_{p,q,l,m} + \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{s,m} D_{l,r} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{r,l} D_{m,s}) \widehat{DCD}_{p,q,l,m} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \Big) + \\
& + \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(y)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} ((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{s,m} D_{l,r} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{r,l} D_{m,s}) \widehat{DCC}_{p,q,l,m} - \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \right. \right. \\
& \left. \left. ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{s,m} D_{l,r} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{r,l} D_{m,s}) \widehat{DCD}_{p,q,l,m} \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_1}} u_j^{(\Gamma_1)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \widehat{DCC}_{p,q,l,m} + \widehat{DCD}_{r,s,l,m} \widehat{DCD}_{p,q,l,m} \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_2}} u_j^{(\Gamma_2)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ -\widehat{DCD}_{r,s,l,m} \widehat{DCC}_{p,q,l,m} + \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \widehat{DCD}_{p,q,l,m} \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) \\
& = \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ \omega \widehat{DCC}_{p,q,l,m} + \rho \widehat{DCD}_{p,q,l,m} \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) \quad (\text{A.54})
\end{aligned}$$

Caso  $v = (n1_i \Psi_i, n2_i \Psi_i)$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(x)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ -\frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{s,m} D_{l,r} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{r,l} D_{m,s}) \widehat{DCD}_{p,q,l,m} + \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \right. \right. \\
& \left. \left. ((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{s,m} D_{l,r} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{r,l} D_{m,s}) \widehat{DCC}_{p,q,l,m} \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{\hat{N}} u_j^{(y)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ -\frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} ((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{s,m} D_{l,r} - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{r,l} D_{m,s}) \widehat{DCD}_{p,q,l,m} - \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} \\
& ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{s,m} D_{l,r} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{r,l} D_{m,s}) \widehat{DCC}_{p,q,l,m} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m) + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_1}} u_j^{(\Gamma_1)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ -\widehat{DCC}_{r,s,l,m} \widehat{DCD}_{p,q,l,m} + \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \widehat{DCC}_{p,q,l,m} \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_2}} u_j^{(\Gamma_2)} \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ \widehat{DCD}_{r,s,l,m} \widehat{DCD}_{p,q,l,m} + \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \widehat{DCC}_{p,q,l,m} \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right) \\
& = \sum_{l,m=0}^{NLGL} \left( J(\hat{x}_l, \hat{y}_m) \left[ -\omega \widehat{DCD}_{p,q,l,m} + \rho \widehat{DCC}_{r,s,l,m} \right] \hat{\omega}_l \hat{\omega}_m \right)
\end{aligned}$$

Come ultimo passaggio ci rimane da semplificare le matrici elementari:

$$\begin{aligned}
\widehat{DCA}_{p,q,r,s,l,m} &= \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)^2} \left( ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{s,m} D_{l,r} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{r,l} D_{m,s}) \right. \\
& \left. ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{q,m} D_{l,p} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{p,l} D_{m,q}) + \right. \\
& \left. + ((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{s,m} D_{l,r} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{r,l} D_{m,s}) \right. \\
& \left. ((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{q,m} D_{l,p} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{p,l} D_{m,q}) \right) \quad (\text{A.55})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{DCB}_{p,q,r,s,l,m} &= -\frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)^2} \left( -((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{s,m} D_{l,r} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{r,l} D_{m,s}) \right. \\
& \left. ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{q,m} D_{l,p} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{p,l} D_{m,q}) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{s,m} D_{l,r} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{r,l} D_{m,s}) \\
& ((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{q,m} D_{l,p} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{p,l} D_{m,q}) \quad (\text{A.56})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{DCC}_{r,s,l,m} &= \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} (n1_j ((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{s,m} D_{l,r} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{r,l} D_{m,s}) - \\
& - n2_j ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \hat{\Psi}_s(\hat{y}_m) D_{l,r} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{r,l} D_{m,s})) \quad (\text{A.57})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{DCD}_{r,s,l,m} &= \frac{1}{J(\hat{x}_l, \hat{y}_m)} (-n2_j ((\beta_2 + \gamma_2 \hat{x}_l) \delta_{s,m} D_{l,r} - (\alpha_2 + \gamma_2 \hat{y}_m) \delta_{r,l} D_{m,s}) - \\
& - n1_j ((\beta_1 + \gamma_1 \hat{x}_l) \delta_{s,m} D_{l,r} - (\alpha_1 + \gamma_1 \hat{y}_m) \delta_{r,l} D_{m,s})) \quad (\text{A.58})
\end{aligned}$$

Dopo aver svolto i prodotti e semplificato ulteriormente si arriva a risolvere un sistema la cui matrice si può modellare come una matrice formata da 4 sottoblocchi, questo è dovuto alla bidimensionalità del problema che ci obbliga a suddividere la soluzione in una parte che dipende solo da  $x$  in una parte che dipende solo da  $y$  e in parti che dipendono dal tipo di soluzioni di bordo stiamo imponendo (Dirichlet o Neumann). La nostra soluzione avrà dunque la seguente forma:

$$\begin{aligned}
U &= \left( u_1^{(x)}, u_2^{(x)}, \dots, u_{\hat{N}}^{(x)}, u_1^{(y)}, u_2^{(y)}, \dots, \right. \\
& \left. , u_{\hat{N}}^{(y)}, u_1^{(\Gamma_1)}, u_2^{(\Gamma_1)}, \dots, u_{N_{\Gamma_1}}^{(\Gamma_1)}, u_1^{(\Gamma_2)}, u_2^{(\Gamma_2)}, \dots, u_{N_{\Gamma_2}}^{(\Gamma_2)} \right) \quad (\text{A.59})
\end{aligned}$$

# Elenco delle figure

3.1	Mappatura dei triangoli . . . . .	30
3.2	Dominio Fisico . . . . .	33
3.3	Mesh Triangolare . . . . .	34
3.4	Mappatura dei triangoli . . . . .	37
4.1	Un esempio di decomposizione in quadrilateri non strutturata . .	49
4.2	Come viene costruita la griglia spettrale mappando gli elementi nel quadrato di riferimento (caso con $n = 3$ ) . . . . .	50
4.3	MeshQuadrangolare . . . . .	53
4.4	Mappatura dei Quadrati . . . . .	54
5.1	Dominio . . . . .	66
5.2	Soluzione Analitica . . . . .	66
5.3	Soluzione Affetta da Modi Spuri . . . . .	67
6.1	Dominio Quadrato . . . . .	74
6.2	Grafico della convergenza (Caso Statico) . . . . .	78
6.3	Grafico della convergenza spettrale (Caso Statico) . . . . .	78
7.1	Grafico della convergenza Spettrale (Equazioni di Maxwell) . . .	91
8.1	Giunzione a T . . . . .	98
8.2	Snapshot (Grado Spettrale 5) . . . . .	100
8.3	Modulo del parametro S11 . . . . .	101
8.4	Fase del parametro S11 . . . . .	101



# Bibliografia

- [1] F. Assous, P. Degond, E. Heintze, P.A. Raviart and J. Seger, *Journal of Computational Physics*, 1993, 109.
- [2] M. L. Barton and Z. J. Cendes “New vector finite elements for three-dimensional magnetic field computation” *J. Appl. Phys.*, vol. 61, pp. 3919-3921, 1987.
- [3] C. Bernardi N. Debit and Y. Maday, “Coupling finite element and spectral methods: first results”, *Mathematics of Computation*, 1990, 54, 189, 21-39.
- [4] C. Canuto, M.Y. Hussaini A. Quarteroni and T.A. Zang, “Spectral methods in fluid dynamics”, Springer Verlag, 1988, New York.
- [5] C.W. Crowley, P.P. Silvester, and H. Hurwitz, “Covariant projection elements for 3D vector field problems”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 24, pp. 158-161, 1988.
- [6] Dautry R., Lions J.L, “Analyse Mathematique et Calcul Numerique pour les Sciences et les Techniques”, volume 6, Masson 1988.
- [7] E. Faccioli, F. Maggio, R. Paolucci and A. Quarteroni, “2D and 3D elastic wave propagation by a pseudo-spectral domain decomposition method”, *Journal of Seismology*, 1997, 1, 237-251.
- [8] B. Jiang, J. Wu and L.A. Povinelli, “The origin of spurious solutions in computational electromagnetics”, *journal of computational physics*, 1996, 125, 104-123.
- [9] D. Komatitsch and J.P. Vilotte, “The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1998, 88, 368-392.

- 
- [10] D.J.P. Lahaye F. Maggio and A. Quarteroni, "Hybrid finite element-spectral element approximation of wave propagation problems", *East-West of Numerical Mathematics*, 1997, 5, 4.
- [11] Y. Maday and A.T. Patera, "Spectral element methods for the Navier-Stokes equations", book *State of the Art Surveys in Computational Mechanics*, publisher ASME, 1989 A. K. Noor, ed.
- [12] F. Maggio and A. Quarteroni, "Acoustic wave simulation by spectral methods", *East-West of Numerical Mathematics*, 1994, 2, 2, 129-150.
- [13] F. Maggio, G. Mazzarella, C. Pitzianti, "Least square spectral element method for 2D Maxwell equations in the frequency domain" submitted to *International journal of numerical modeling* (2003).
- [14] G. Mazzarella, C. Pitzianti: "A new approach to the automatic analysis of waveguide beam-forming networks", submitted to *ACES Journal* (2003).
- [15] P. Monk, "Finite element time domain methods for Maxwell's equations", book *Proceedings of Second international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation*, publisher SIAM, 1994, address Philadelphia, 1993, 380, I Stakgold, ed.
- [16] G. Mur, "Edge Elements, their advantages and their disadvantages", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1994, 30,5,3552.
- [17] G. Mur, "The fallacy of edge elements", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1998, 34, s 5, 3244-3247.
- [18] J. Nedelec, "Mixed finite elements in  $R^3$ ", *Numerical Mathematics*, 1980, 35, 315-341.
- [19] K. D. Paulsen and D. R. Lynch, "Elimination of vector parasites in finite element Maxwell solutions", *IEEE Transactions on Microwave Technology and Techniques*, 1980, 35, 315-341.
- [20] A. F. Peterson, "Finite element solution of the vector wave equation using divergenceless basic function" in *Proc. 1989 IEEE AP-S Int. Symp.*, vol III, pp. 1624-1627.
- [21] C. Pitzianti, F. Maggio, G. Mazzarella, "Least squares spectral elements and domain decomposition for the treatment of electromagnetic problems", *Proceedings del VI Congresso nazionale SIMAI (Società Italiana di Matematica Applicata e Industriale (CNR))*, Chia (CA), 27-31 Maggio 2002.

- [22] C. Pitzianti, "Exact absorbing boundary condition based on a new hybrid SEM/MOM Method", DIEE Università di Cagliari technical report, Gennaio 2003.
- [23] C. Pitzianti, F. Maggio, G. Mazzarella, "A parallel least square spectral element method for the Maxwell equations in the frequency domain", Proceedings del RINEM 2002 (Riunione Nazionale di Elettromagnetismo), Ancona, 16-19 Settembre 2002.
- [24] E. Priolo and G. Seriani, "A numerical investigation of Chebychev spectral element method for acoustic waves propagation", book Proceedings of 13th IMACS World Congress on Computational and Applied Mathematics, publisher Criterion Press, 551-556, 1991, Vichnevetsky, R., ed.
- [25] A. Quarteroni and A. Valli, Numerical approximation of partial differential equations, publisher Springer Verlag, 1994, address Berlin.
- [26] D.C. Ross, J.L. Volakis and H.T. Anastassiou, IEEE Trans Antennas Propagat, 1995, 43, 277.
- [27] A.A. Samarskii and A.N. Tikhonov, "Equations of mathematical physics", publisher Dover, 1990, address New York.
- [28] H. Spachmann, S. Gutschling, H. Krger, T. Weilan, "FIT-Formulation for Nonlinear Dispersive Media", International of Numerical Modelling, 1999, 12, 81-92, Special Issue.
- [29] R. Stacey, "Improved transparent boundary formulations for the elastic-wave equation", Bulletin of the Seismological Society of America, 1988, 78, 6, 2089-2097.
- [30] Stoer-Bulirsch: "Introduzione All'analisi numerica".
- [31] J.P. Webb "Edge elements and what they can do for you", IEEE transaction on magnetics vol. 29, no.2 march 1993
- [32] K.S. Yee, "Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media", IEEE Trans Antennas Propagat, 1966, 14, 302-307.